# 定子开槽永磁同步电机气隙比磁导解析计算

于吉坤 李立毅 张江鹏 曹继伟

(哈尔滨工业大学电气学院 哈尔滨 150001)

**摘要** 采用镜像和保角变换相结合的方法计算定子开槽永磁同步电机的气隙比磁导。以光滑转子铁磁表面为镜面,将定子开槽永磁同步电机气隙原像及其镜像作为解析模型,经过多次保角 变换得到气隙比磁导解析公式。解析模型考虑了齿槽之间的影响、定子开槽对气隙磁场径向分量 和切向分量的影响,解析公式可用于定子开槽永磁同步电机的励磁磁场、电枢反应磁场、电磁力 和齿槽转矩。在解析模型的基础上,对某定子开槽永磁同步电机单个齿槽指定路径上和气隙区域 内气隙比磁导进行求解,与有限元结果相比较,表明了所提解析方法的准确性。

关键词:永磁同步电机 气隙比磁导 开槽定子 镜像 保角变换

中图分类号: TM351

# Analytical Calculation of Air-Gap Relative Permeance in Slotted Permanent Magnet Synchronous Motor

Yu Jikun Li Liyi Zhang Jiangpeng Cao Jiwei (Electrical Institute Harbin Institute of Technology Harbin 150001 China)

**Abstract** The combination of mirror image method and conformal transformation is used to calculate the air-gap relative permeance of slotted permanent magnet synchronous motor (PMSM). As a mirror, the surface of the ferromagnetic rotor is smooth. An image can be created from the air-gap of the slotted PMSM, and these two air-gap formed the analytical model. The air-gap relative permeance formula can be obtained by several conformal transformation. The analytical model could consider the slot effect on the radial and tangential components of the air gap magnetic field, and its analytical formula can be used to predict excitation magnetic field, armature magnetic field, electromagnetic force and cogging torque of the slotted PMSM. Based on the analytical model, air-gap relative permeance is solved on the specified path and in the region of a slotted PMSM. Compared with the finite element results, the accuracy of the analytical method is demonstrated.

Keywords: Permanent magnet synchronous motors, air-gap relative permeance, slotted stator, mirror image, conformal transformation

## 0 引言

与传统电机相比,永磁电机具有高功率密度、 高可靠性以及更小的体积等优势,近年来引起了业 界极大兴趣和广泛研究<sup>[1-3]</sup>。现有的商业数值计算软 件具有精度高、可处理复杂结构等优点,其中,解 析法能明确反映各尺寸参数与电磁参数的关系且速

国家杰出青年科学基金(51225702)和国家科技重大专项(2012-ZX04001051)资助项目。

收稿日期 2016-04-15 改稿日期 2016-05-23

度快、计算量小,是电机初始设计优化的首选方法, 且有利于对电机各方面性能的分析和改进<sup>[4]</sup>。电机 内气隙磁场分布是永磁电机设计中的基础问题,是计 算永磁稳态参数<sup>[5]</sup>、电机电磁力<sup>[6]</sup>、齿槽转矩<sup>[7]</sup>、电 磁损耗<sup>[8]</sup>等的基础。

为了解决开槽效应的气隙磁场解析计算问题, 国内外学者对开槽效应进行了很多研究,研究方法 有直接法和间接法之分。直接法是分区域对槽内和 气隙内的磁场分别求解拉普拉斯方程,然后通过傅 里叶级数的方法将槽和气隙中的磁场接口很好地 统一起来<sup>[9,10]</sup>,直接法精度较高,但解析公式不够 简洁直观:间接法是将简单无槽磁场解析公式乘以 气隙比磁导得到有槽气隙磁场解析公式<sup>[11]</sup>,间接法 公式简洁且便于理解,但其求解精度取决于气隙比 磁导函数准确性。文献[12,13]分别推导了无槽无刷 永磁直流电机磁钢励磁磁场和绕组电枢磁场解析表 达式。文献[14]使用气隙比磁导函数来计及电机定 子开槽,将单个齿槽内气隙比磁导函数近似表示为 直线和正弦曲线分段组合函数,并与无槽磁场相乘, 提高了磁场解析精度。文献[15]通过无旋磁场的保 角变换, 求得复数气隙比磁导函数, 只取复数气隙 比磁导的实部, 气隙磁场解析公式仅能计及定子开 槽对气隙磁场径向分量的影响。文献[16]忽略齿槽 之间的影响,将单个齿槽机械单元子域模型作为研 究对象,将复数气隙比磁导函数的实部和虚部分别 与无槽气隙磁场的径向分量和切向分量相乘,同时 将定子开槽结构考虑进气隙磁场径向分量和切向分 量。文献[17]通过镜像法,分离出半个齿槽电磁单 元子域模型,得到光滑转子铁心外表面的气隙磁导 函数,并比较了齿槽机械单元和电磁单元气隙比磁 导曲线,后者在齿槽之间是平滑过渡的,该电磁单 元模型能计及齿槽之间的影响关系,但该文献仅给 出了光滑转子铁心外表面气隙比磁导,并且缺乏相 应的验证。

本文在以上研究的基础上,以光滑转子表面为 镜面,利用镜像法得到电机所有定子开槽的镜像,定 子开槽的原像和镜像共同组成气隙比磁导计算区 域,考虑到计算区域的对称性,选取半个齿槽原像 和镜像子区域为研究的最小电磁单元,将此电磁单 元多次保角变换,映射到规则子域模型中,并得到 整个齿槽范围内气隙比磁导表达式。基于该解析模 型,以一台实际永磁同步电机(Permanent Magnet Synchronous Motor, PMSM)为算例,计算了磁 钢外表面路径上的气隙比磁导的径向分量和切向 分量,并与该路径上的有限元分析结果比较,初 步验证解析法的有效性;其次比较单个齿槽内不 同位置气隙比磁导曲线,得到气隙比磁导分布特点 和规律:最后用有限元法对整个齿槽气隙比磁导解 析结果进行仿真,进一步说明了本文解析法的正确 性。

## 1 解析模型

本文以内转子永磁同步电机作为解析计算对 象,其横截面如图1所示,主要的电磁材料包括定 子铁心、绕组、护套、永磁体和转子铁心。



Fig.1 Cross section of PMSM

为了便于分析,作如下基本假设:

(1) 定、转子铁心的磁导率无穷大。

(2)绕组、磁钢和护套的相对磁导率和空气磁 导率相同。

(3)分析区域在二维平面内,不计端部效应。

(4)定子槽为规则径向扇形结构,槽口宽度不 变。

(5) 定子槽槽深无限大。

根据上面基本假设可得到图 2 中的简化解析计 算模型,简化模型只包含铁磁和空气两种电磁材料。 *R*<sub>1</sub>为定子铁心外表面半径,*R*<sub>2</sub>为转子铁心内表面半 径,*R*<sub>m</sub>、*R*<sub>sl</sub>分别为磁钢外表面半径和护套外表面半 径(图 2 未标出),*α*<sub>1</sub>为定子单个齿槽宽度,*α*<sub>2</sub>为 定子槽槽口宽度,*α*<sub>1</sub>和*α*<sub>2</sub>都是机械角度。



图 2 简化的解析计算模型

Fig.2 Simplified analytical calculation model

设永磁同步电机定子铁心开槽前后气隙磁通密 度分别为  $B_{\text{slotless}}$ 和  $B_{\text{slot}}$ ,均为复数形式,实部是径 向气隙磁通密度  $B_{\text{rslotless}}$ 和  $B_{\text{rslot}}$ ,虚部是径向气隙磁 通密度  $B_{\text{aslotless}}$ 和  $B_{\text{aslot}}$ ,即

$$\begin{cases} B_{\text{slotloss}} = B_{r\text{slotloss}} + jB_{\alpha\text{slotloss}} \\ B_{\text{slot}} = B_{r\text{slot}} + jB_{\alpha\text{slot}} \end{cases}$$
(1)

定子开槽气隙比磁导 $\lambda(r, a)$ 用来描述定子铁心 开槽对任意位置(r, a)气隙磁场的影响,简记为 $\lambda$ , 可表示为有槽气隙磁通密度 $B_{slot}$ 和无槽气隙磁通密 度 $B_{slotloss}$ 比值的共轭复数形式,即

$$\lambda = \frac{B_{\text{slot}}}{B_{\text{slotloss}}} \tag{2}$$

由式(1)知,气隙比磁导λ是复数分布函数。 在具体推导模型气隙比磁导λ表达式之前,需要通 过镜像法得到最小气隙比磁导λ电磁计算单元。值 得注意的是,如果将单个齿槽机械单元作为最小电 磁计算单元,就忽略了其他齿槽机械单元对该齿槽 内气隙比磁导的影响。镜像法第一步以极坐标系中 的定子铁心所有开槽为原像,如图 3a 所示,经光滑 转子铁心外表镜面,得到直角坐标系中的定子开槽 原像和镜像组,如图 3b 所示;第二步将与磁力线重 合的定子槽中心线和定子齿中心线之间多边形 *z*<sub>1</sub>*z*<sub>2</sub>*z*<sub>3</sub>*Z*<sub>3</sub>*Z*<sub>2</sub>*Z*<sub>1</sub>分离出来作为最小电磁计算单元,如图 3b 所示,用于气隙比磁导的求解。所有齿槽单元内 气隙比磁导是相同的,只要求出某一个齿槽单元内 的气隙比磁导,就可以重复扩展到其他齿槽单元内, 这样就可以获得整个定子开槽电机气隙比磁导。





为便于分析,电磁单元模型镜像之前所在的极 坐标系 rOa 可以看作某一复数平面,极坐标系面内 任意一点坐标 (r,a) 用复数  $s=re^{ja}$ 表示,此复数平 面简称 s 平面。镜像之后所在的直角坐标系 xOy 可 以看作另一复数平面,直角坐标系面内任意一点坐 标 (x, y) 用复数 z=x+jy 表示,此复数平面简称 z平面。在下面气隙比磁导的推导中,还要涉及其他 的复数平面,如 w 平面、t 平面,对应的电磁单元 模型映射之后的位置坐标 (u, v) 和  $(\Psi, \Omega)$  分别使 用复数 w=u+jv 和  $t=\Psi+j\Omega$ 表示。

## 2 气隙比磁导

根据基本假设,在图2简化模型中定转子铁心

磁导率无穷大,它们之间的气隙磁导率与空气磁导 率相同,气隙磁场的磁力线将垂直进出定转子铁心, 这说明定子铁心内表面和转子铁心外表面都是等势 面,由于磁钢励磁和电枢反应的存在,这两个等势 面存在磁势差,设转子铁心外表面等位面磁位为0, 定子铁心内表面等位面磁位为 Q<sub>0</sub>,气隙中任意位置 磁位为 Q,对于这种定子开槽气隙无旋场可以通过 求解标量磁位 Q 拉普拉斯方程获得气隙中磁场的分 布,对于规则无槽结构模型容易获得该方程的解, 对于有槽结构模型获得该方程的解比较困难,为此 可以采用保角变换,将有槽复数 s 平面标量磁位 Q 分布映射到无槽复数 t 平面标量磁位 Q 分布,再通 过气隙比磁导定义式(2)得到其具体表达式。

## 2.1 s-z 平面之间的对数变换

采用镜像法在 *z* 平面内分离出最小电磁单元多 边形 *z*<sub>1</sub>*z*<sub>2</sub>*z*<sub>3</sub>*Z*<sub>3</sub>*Z*<sub>2</sub>*Z*<sub>1</sub>, *z*<sub>1</sub>、 *z*<sub>2</sub> 和 *z*<sub>3</sub> 是原像几何点, *Z*<sub>1</sub>、 *Z*<sub>2</sub>和 *Z*<sub>3</sub> 是镜像像几何点, *s* 平面和 *z* 平面对应关系 如图 4 所示。



Fig.4 Mapping relationship between plane s and plane z

表 1 为 *z* 平面内 *z*<sub>1</sub>、*z*<sub>2</sub>、*z*<sub>3</sub>和 *s* 平面内 *s*<sub>1</sub>、*s*<sub>2</sub>、 *s*<sub>3</sub> 的坐标,通过观察对应几何点坐标之间的映射关 系,容易得到 *s*-*z* 平面间的对数变换,即

$$z = \frac{b_1}{\alpha_1} \ln \frac{s}{R_2} = \frac{b_2}{\alpha_2} \ln \frac{s}{R_2}$$
(3)

式中

$$\begin{cases} \delta = R_1 - R_2 \\ b_1 = \frac{\alpha_1 \delta}{\ln(R_1 / R_2)} \\ b_2 = \frac{\alpha_2 \delta}{\ln(R_1 / R_2)} \end{cases}$$
(4)

#### 表 1 *s* 和 *z* 平面内主要几何点与坐标

Tab.1 Main points and coordinates in plane s and plane z

	s 平面		z 平面
点	坐 标	点	坐 标
<i>S</i> <sub>1</sub>	$\infty e^{j(\alpha_1-\alpha_2)/2}, \infty e^{j\alpha_1/2}$	$z_1$	$\infty + j(b_1 - b_2)/2, \infty + jb_1$
<i>s</i> <sub>2</sub>	$R_1 e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)/2}$	$z_2$	$\delta + j(b_1 - b_2)/2$
<i>s</i> <sub>3</sub>	$R_1 e^{j0}$	$Z_3$	δ

## 2.2 z-w 平面之间的许克变换

*z* 平面和 *w* 平面对应关系如图 4、图 5 和表 2 所示, *w*<sub>1</sub>、*w*<sub>2</sub>、*w*<sub>3</sub>、*W*<sub>3</sub>、*W*<sub>2</sub>、*W*<sub>1</sub>六点坐标分别选为 *w*<sub>1</sub>=1/*k*<sub>1</sub>、*w*<sub>2</sub>=1/*k*、*w*<sub>3</sub>=1、*W*<sub>3</sub>=-1、*W*<sub>2</sub>=-1/*k*、*W*<sub>1</sub>=-1/*k*<sub>1</sub>, 其中 *k*<sub>1</sub>和 *k* 为待定系数。



图 5 w 平面之间的映射关系

Fig.5 Mapping relationship of plane w



Tab.2 Main points and coordinates in plane z and plane w

<i>z</i> 平面		и	w 平面	
点	坐标	多边形内角	点	坐标
$z_1$	$-b_2/2 + j\infty, j\infty$	0	$w_1$	$1/k_1$
$z_2$	$-b_2/2 + j\delta$	$3\pi/2$	$w_2$	1/k
<i>Z</i> 3	$-b_1/2 + j\delta$	$\pi/2$	<i>W</i> <sub>3</sub>	1
$Z_3$	$-b_1/2 - j\delta$	$\pi/2$	$W_3$	-1
$Z_2$	$-b_2/2 - \mathrm{j}\delta$	$3\pi/2$	$W_2$	-1/k
$Z_1$	$-b_2/2$ $-j\infty$ , $-j\infty$	0	$W_1$	$-1/k_1$

于是 z-w 平面间的许克变换为

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial w} &= S_{zw}' \left( w - \frac{1}{k_1} \right)^{-1} \left( w - \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \left( w - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ & \left( w + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( w + \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \left( w + \frac{1}{k_1} \right)^{-1} \\ &= S_{zw} \frac{\sqrt{1 - k^2 w^2}}{\sqrt{\left( 1 - w^2 \right)} \left( 1 - k_1^2 w^2 \right)} \end{aligned}$$
(5)

故

$$z = S_{zw} \int \frac{\sqrt{1 - k^2 w^2}}{\sqrt{\left(1 - w^2\right)} \left(1 - k_1^2 w^2\right)}} dw + K_{zw}$$
(6)

根据 z 平面和 w 平面对应关系可求出 S<sub>zw</sub>和 K<sub>zw</sub>, 可得

$$z = \frac{b_2}{\pi} \left[ p \frac{\operatorname{sn}(\varphi | k^2) \cdot \operatorname{dn}(\varphi | k^2)}{\operatorname{cn}(\varphi | k^2)} - \Pi(p, \varphi | k^2) \right] \quad (7)$$

式中,  $\operatorname{sn}(\varphi|k^2)$ 、 $\operatorname{cn}(\varphi|k^2)$ 、 $\operatorname{dn}(\varphi|k^2)$ 和  $\Pi(p,\varphi|k^2)$ 为雅可 比椭圆函数和第三类椭圆积分。p、 $\varphi 与 w$ 、 $k_1/k$ 之 间的关系为

$$\begin{cases} w = \operatorname{sn}\left(p \left| k^{2}\right) \\ k_{1}/k = \operatorname{sn}\left(\varphi \left| k^{2}\right) \right. \end{cases}$$
(8)

$$\Pi\left(p,\varphi|k^{2}\right) = \int_{0}^{\varphi} \frac{1}{\left(1-p\sin^{2}\theta\right)\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\theta}} \,\mathrm{d}\theta \qquad (9)$$

式中,  $\varphi$  和 k 通过式 (10) 确定。

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{K}\left(k^{2}\right)}{\pi} \left[ \frac{\mathrm{sn}\left(\varphi|k^{2}\right) \cdot \mathrm{dn}\left(\varphi|k^{2}\right)}{\mathrm{cn}\left(\varphi|k^{2}\right)} - Z\left(\varphi|k^{2}\right) \right] - \frac{\delta}{b_{2}} = 0 \\ \frac{2 \,\mathrm{K}\left(1 - k^{2}\right)}{\pi} \left[ \frac{\mathrm{sn}\left(\varphi|k^{2}\right) \cdot \mathrm{dn}\left(\varphi|k^{2}\right)}{\mathrm{cn}\left(\varphi|k^{2}\right)} - Z\left(\varphi|k^{2}\right) \right] - \frac{\varphi}{\mathrm{K}\left(k^{2}\right)} - \frac{\alpha_{1} - \alpha_{2}}{\alpha_{2}} = 0 \end{cases}$$

$$(10)$$

式中,  $K(k^2)$ 、 $Z(\varphi,k^2)$ 分别为第一类完全椭圆积分函数、雅可比 Zeta 函数。

$$\begin{cases} \mathbf{K}\left(k^{2}\right) = \mathbf{F}\left(\frac{\pi}{2}|k^{2}\right) \\ Z\left(\varphi|k^{2}\right) = \mathbf{E}\left(\varphi|k^{2}\right) - \frac{\mathbf{E}(k)}{\mathbf{K}(k)}\mathbf{K}\left(\varphi|k^{2}\right) \end{cases}$$
(11)

式中, F( $\varphi|k^2$ )、E( $\varphi|k^2$ )和 E( $k^2$ )分别为第一类椭圆积 分、第二类椭圆积分和第二类完全椭圆积分,具体 表达式为

$$\begin{cases} F(\varphi|k^{2}) = \int_{0}^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^{2} \sin^{2} \theta}} d\theta \\ E(\varphi|k^{2}) = \int_{0}^{\varphi} \sqrt{1 - k^{2} \sin^{2} \theta} d\theta \\ E(k^{2}) = E\left(\frac{\pi}{2}|k^{2}\right) \end{cases}$$
(12)

## 2.3 w-t 平面之间许克变换

w 平面和 t 平面对应关系如图 5、图 6 和表 3 所示, w<sub>3</sub>、w<sub>4</sub>两点坐标分别选为 w<sub>3</sub>=-1、w<sub>4</sub>=1。



图 6 *t* 平面之间的映射关系

Fig.6 Mapping relationship of plane t

表 3 w-t 平面内主要几何点与坐标

Tab.3	Main points a	nd coordinates in	n plane w	and plane <i>t</i>
-------	---------------	-------------------	-----------	--------------------

<i>t</i> 平面		и	w 平面	
点	多边形内角	点	坐标	
$t_1$	$\pi/2$	<i>w</i> <sub>1</sub>	$-1/k_1$	
$t_3$	$\pi/2$	<i>W</i> 3	-1	
$T_3$	$\pi/2$	$W_3$	1	
$T_1$	π/2	$W_1$	$1/k_1$	

于是 t-w 平面间的许克变换为

$$\frac{\partial t}{\partial w} = S_{tw}' \left( w + \frac{1}{k_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( w + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( w - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( w - \frac{1}{k_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ = S_{tw}' \left( w^2 - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( w^2 - \frac{1}{k_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = S_{tw} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2} \sqrt{1 - k_1^2 w^2}}$$
(13)

故

$$t = S_{tw} \int \frac{1}{\sqrt{1 - w^2} \sqrt{1 - k_1^2 w^2}} \mathrm{d}w + K_{tw}$$
(14)

根据 t 平面和 w 平面对应关系可求出 S<sub>zw</sub>和 K<sub>zw</sub>, 可得

$$t = \frac{\Omega_0}{\mathrm{K}(k_1^2)} \mathrm{sn}^{-1} w \tag{15}$$

#### 2.4 气隙比磁导

经过 *z* 平面和 *w* 平面中间的保角变换,*s* 平面 复杂有槽标量磁位 *Q* 分布,如图 4a 所示,变换到 *t* 平面内简单无槽标量磁位 *Q* 分布,如图 6 所示。在 *t* 平面内对标量磁位 *Q* 取梯度,就可以获得 *s* 平面 磁场分布,*s* 平面内任一点的磁通密度 *B*<sub>slot</sub>为

$$B_{\text{slot}} = \mu_0 \frac{\partial t}{\partial s} = \mu_0 \frac{\partial t}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$
$$= \mu_0 \frac{\pi}{r\alpha_2} \cdot \frac{\Omega_0}{K(k_1^2)} \cdot \frac{\operatorname{cn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{dn}\alpha} \sqrt{\frac{1 - k_1^2 w^2}{1 - k^2 w^2}} \qquad (16)$$

当电机定子不开槽, s 平面内任一点的磁通密 度 B<sub>slotless</sub>为

$$B_{\text{slotless}} = \mu_0 \frac{\Omega_0}{r \ln(R_1/R_2)} \tag{17}$$

将式(16)和式(17)代入式(2)可以得到定 子开槽永磁同步电机气隙比磁导 λ 为

$$\lambda = \frac{\pi \ln \left( R_1 / R_2 \right) \operatorname{cn} \left( \varphi \middle| k^2 \right)}{\alpha_2 \operatorname{K} \left( k_1^2 \right) \operatorname{sn} \left( \varphi \middle| k^2 \right) \cdot \operatorname{dn} \left( \varphi \middle| k^2 \right)} \sqrt{\frac{1 - k_1^2 w^2}{1 - k^2 w^2}} \quad (18)$$

式中,w的值通过求解方程 h(w)=0的根获得,h(w)为

$$h(w) = \frac{\pi}{\alpha_2} \left( \ln \frac{r}{R_2} + j\alpha \right) + \Pi(p, \varphi | k^2) - p \frac{\operatorname{sn}(\varphi | k^2) \cdot \operatorname{dn}(\varphi | k^2)}{\operatorname{cn}(\varphi | k^2)}$$
(19)

# 3 有限元仿真

### 3.1 解析结果

本文以一台定子开槽永磁同步电机为例,样机 参数见表 4。根据表 4 参数可以计算出气隙比磁导 所需要的 k、 $\varphi$ 、 $sn(\varphi|k^2)$ 、 $cn(\varphi|k^2)$ 、 $dn(\varphi|k^2)$ 、 $k_1$ 、  $K(k_1^2)$ 等中间参数,计算结果见表 5。

表 4 开槽永磁同步电机参数

Tab.4 Parameters	of slotted	PMSM
------------------	------------	------

参数	数值
定子内表面半径 R <sub>1</sub> /mm	29.0
护套外表面半径 R <sub>sl</sub> /mm	28.4
磁钢外表面半径 R <sub>m</sub> /mm	27.8
转子外表面半径 R <sub>2</sub> /mm	20.8
齿槽宽角度 α <sub>1</sub> /rad	0.523 6
槽口宽角度 α <sub>2</sub> /rad	0.138 0
定子槽数 Q	12

表 5 计算结果

Tab.5 Calculation results

参数	数 值	参 数	数 值
k	0.883 2	φ	1.900 0
$\operatorname{sn}(\varphi k^2)$	0.988 9	$k_1 = k \operatorname{sn}(\varphi   k^2)$	0.873 4
$\operatorname{cn}(\varphi k^2)$	0.148 6	$K(k^2)$	2.214 0
$dn(\varphi k^2)$	0.487 1	$K(k_1^2)$	2.180 2

根据表 5 中计算结果, 再结合式 (18) 和式 (19), 磁钢外表面  $r=R_m$  处的一个槽距内的复数气隙比磁导  $\lambda=\lambda_r+j\lambda_a$ , 如图 7 所示。从图 7 中可以看出, 实 部  $\lambda_r$ 和虚部  $\lambda_a$ 的曲线分别关于槽中心线  $\alpha=0.5\alpha_1$  偶 对称和奇对称。



Fig.7 Air-gap relative permeance in one slot pitch

选取齿中心线  $\alpha=0$ 、齿槽分界线  $\alpha=(\alpha_1-\alpha_2)/2$ 、 半槽中心线  $\alpha=(2\alpha_1-\alpha_2)/4$  和槽中心线  $\alpha=\alpha_1/2$ ,分析 气隙内  $r \in [R_2, R_1]$ 径向路径上气隙比磁导幅值[ $\lambda$ ]的 变化趋势,图 8 为计算得到的趋势曲线。图 8 中,  $\Delta r$  表示与转子外表面的径向距离, $\Delta r=r-R_2$ ,可以 看出转子外表面附近的气隙比磁导幅值趋近于 1, 受定子开槽影响较小,定子内表面附近气隙比磁导 幅值偏离 1,受定子开槽影响较大。





选取转子外表面  $r=R_2$ 、磁钢外表面  $r=R_m$ 、护套 外表面  $r=R_{s1}$ 和定子内表面  $r=R_1$ ,分析单个槽距内  $\alpha \in [0, \alpha_1]$ 气隙比磁导幅值[ $\lambda$ ]的变化趋势。图 9 为计 算得到的趋势曲线,从图中可看出齿中心线附近的 气隙比磁导幅值趋近于 1,受定子开槽影响较小, 槽中心线附近气隙比磁导幅值偏离 1,受定子开槽 影响较大。





Fig.9 Air-gap relative permeance in the tangential direction of one slot pitch

### 3.2 有限元计算结果

为了验证解析结果的正确性,根据表 4 参数建 立开槽电机有限元模型,图 10a 是无槽有限元模型, 图 10b 是有槽有限元模型。设置 A 相绕组电枢反应 在定转子铁心之间产生磁位差,绕组联结方式如图 10 所示,+A 表示上层边,-A 表示下层边。



Fig.10 PMSM finite element models

图 10 有限元模型 A 相绕组通入单位安匝电流 激励,提取图 10a 无槽结构磁通密度的径向分量  $B_{rslotless}$ 和切向分量  $B_{aslotless}$ ,提取图 10b 有槽结构磁 通密度的径向分量  $B_{rslot}$ 和切向分量  $B_{aslot}$ ,将其代 入式(20),即可得到复数气隙比磁导  $\lambda$  的实部  $\lambda_r$ 和虚部  $\lambda_a$  有限元计算结果。

$$\begin{cases} \lambda_r = \frac{B_{rslot}B_{rslotloss} + B_{aslot}B_{\alpha slotloss}}{B_{rslotloss}^2 + B_{\alpha slotloss}^2} \\ \lambda_{\alpha} = \frac{B_{\alpha slot}B_{rslotloss} - B_{rslot}B_{\alpha slotloss}}{B_{rslotloss}^2 + B_{\alpha slotloss}^2} \end{cases}$$
(20)

图 11 是磁钢外表面气隙比磁导解析法结果和有 限元结果的比较,二者比较吻合,初步验证了气隙 比磁导解析计算预估的可靠性。

将式(18)和式(20)分别应用到算例电机 图 2 解析模型和图 10 有限元模型的整个槽距气隙 域中,得到整个槽距气隙域的气隙比磁导解析结果 和有限元结果,分别如图 12a 和图 12b 所示,有 限元结果全面验证了气隙比磁导解析计算的正确性。



图 11 磁钢外表面气隙比磁导







### 4 结论

本文采用镜像法和保角变换,建立了定子开槽 永磁同步电机的等效解析模型,推导出气隙比磁导 解析表达式,表达式既能考虑齿槽之间的影响,也 能计及定子开槽对气隙磁场径向分量和切向分量的 影响,气隙比磁导与无槽电机磁场相乘,可间接计 算得到有槽励磁磁场、电枢反应磁场、径向切向电 磁力和齿槽转矩。通过比较开槽电机单个齿槽指定 路径和气隙区域气隙比磁导的解析值和有限元计算 值,证实了该解析方法的有效性。本文的解析模型 为定子开槽永磁同步电机的初始设计和优化提供了 一种行之有效的方法。

### 参考文献

- 张凤阁,杜光辉,王天煜,等.高速电机发展与设计综述[J].电工技术学报,2016,31(7):1-18.
   Zhang Fengge, Du Guanghui, Wang Tianyu, et al. Review on development and design of high speed machines[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2016, 31(7): 1-18.
- [2] 朱军,田淼,付融冰,等.基于载波频率成分的永磁同步电机转子定位研究[J].电力系统保护与控制, 2015,43(14):48-54.

Zhu Jun, Tian Miao, Fu Rongbing, et al. Research on rotor position of permanent magnet synchronous motor based on carrier frequency component[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(14): 48-54.

 [3] 王丹,刘崇茹,李庚银.永磁直驱风电机组故障穿 越优化控制策略研究[J].电力系统保护与控制, 2015,43(24):83-89.

Wang Dan, Liu Chongru, Li Gengyin. Research on the fault ride-through optimal control strategy of PMSGbased wind turbine[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(24): 83-89.

[4] 李立毅,于吉坤,曹继伟,等.基于PWM逆变电路供电的永磁同步电机电压和电流的谐波通用型新算法
[J].中国电机工程学报,2015,35(23):6203-6213.

Li Liyi, Yu Jikun, Cao Jiwei, et al. A universal and new harmonic algorithm of voltage and current of permanent magnet synchronous motors supplied by PWM inverter[J]. Proceedings of the CSEE, 2015, 35(23): 6203-6213.  [5] 赵霞,周桢钧,余渌绿,等.六相电励磁同步风力 发电机组的稳态模型[J].电力系统保护与控制, 2016,44(1):77-84.
 Zhao Xia, Zhou Zhenjun, Yu Lulü, et al. Steady-state

model of six-phase electrically excitation synchronous wind generators[J]. Power System Protection and Control, 2016, 44(1): 77-84.

- [6] Wu L J, Zhu Z Q, Chen J T, et al. An analytical model of unbalanced magnetic force in fractional-slot surfacemounted permanent magnet machines[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2010, 46(7): 2686-2700.
- [7] Zarko D, Ban D, Lipo T A. Analytical solution for cogging torque in surface permanent-magnet motors using conformal mapping[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2008, 44(1): 52-65.
- [8] 唐任远,陈萍,佟文明,等.考虑涡流反作用的永磁体涡流损耗解析计算[J].电工技术学报,2015, 30(24):1-10.

Tang Renyuan, Chen Ping, Tong Wenming, et al. Analytical calculation of eddy current loss accounting for eddy current reaction[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, 30(24): 1-10.

- [9] Zhu Z Q, Wu L J, Staton D, et al. An improved subdomain model for predicting magnetic field of surface-mounted permanent magnet machines accounting for tooth-tips[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2011, 47(6): 1693-1704.
- [10] Zhu Z Q, Wu L J, Staton D, et al. Subdomain model for predicting armature reaction field of surfacemounted permanent-magnet machines accounting for tooth-tips[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2011, 47(4): 812-822.
- [11] Gaussens B, Hoang E, de la Barriere O, et al. Analytical armature reaction field prediction in fieldexcited flux-switching machines using an exactrelative permeance function[J]. IEEE Transactions on Magnetics,

2013, 49(1): 628-641.

- [12] Zhu Z Q, Howe D, Bolte E, et al. Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet DC motors, part I: open-circuit field[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1993, 29(1): 124-135.
- [13] Zhu Z Q, Howe D. Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet DC motors, part II: armature-reaction field[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1993, 29(1): 136-142.
- [14] Zhu Z Q, Howe D. Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet DC motors, part III: effect of stator slotting[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1993, 29(1): 143-151.
- [15] 林福,左曙光,马琮淦,等.考虑开槽的分数槽集 中绕组永磁同步电机电枢反应磁场解析计算[J].电 工技术学报,2014,29(5):29-35.
  Lin Fu, Zuo Shuguang, Ma Conggan, et al. Analytical calculation of armature reaction field including slotting effects in PMSM with concentrated fractional-slot winding[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(5): 29-35.
- [16] Zarko D, Ban D, Lipo T A. Analytical calculation of magnetic field distribution in the slotted air gap of a surface permanent-magnet motor using complex relative air-gap permeance[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2006, 42(7): 1828-1837.
- [17] 汤蕴璆. 电机内的电磁场[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 1998.

#### 作者简介

于吉坤 男,1987年生,博士研究生,研究方向为高速永磁电机 理论与设计。

E-mail: yjk721@126.com

李立毅 男,1969 年生,教授,博士生导师,研究方向为特种电 机系统及其控制。

E-mail: liliyi.hit@gmail.com (通信作者)