

用于平滑处理的卷积运算及其在有限元磁场分析后处理中的应用

罗炜¹ 李志强² 罗应立²

(1. 浙江大学理学院 杭州 310027 2. 华北电力大学电气与电子工程学院 北京 102206)

摘要 在用一阶三角元计算磁场所得到的结果中, 相邻单元磁通密度通常不等, 所得到的是分片恒定的磁通密度及磁导率。为了计算电磁力在铁心中以及在不同介质交界面上的分布, 需要对磁场能量或磁导率求导数, 为此, 本文采用卷积方法得到平滑分布的磁通密度及磁导率。首先推导进行平滑化处理的卷积运算基本公式, 然后对比采用不同的核函数进行卷积运算所得到的结果, 并给出求取平滑化处理核函数的一般方法; 作为卷积方法的一个应用, 得到考虑饱和时计算铁心内部电磁力密度的公式。

关键词: 卷积 电磁力 有限元 光滑处理

中图分类号: TM153

Smoothing Convolutions and Applications in Postprocessing of Finite Element Analysis of Magnetic Field

Luo Wei¹ Li Zhiqiang² Luo Yingli²

(1. Zhejiang University Hangzhou 310027 China 2. North China Electric Power University Beijing 102206 China)

Abstract In magnetic field computations with linear triangular elements, piecewise constant magnetic flux densities are obtained, which are unequal over two adjacent elements. In order to compute magnetic force densities inside iron and along boundary of different media, derivatives of magnetic energy and permeability are needed. A convolution method is used to obtain smoothly distributed flux densities. Fundamental formulas for smoothing via convolutions are firstly derived, then a comparison between results of convolution by different kernel functions is made and a method to find kernel functions with required smoothness is given, lastly an application of the convolution method to compute magnetic force density inside iron is illustrated.

Keywords: Convolution, magnetic forces, finite element method, smoothing

国家自然科学基金资助项目 (50677019)。

收稿日期 2008-08-13 改稿日期 2009-02-06

1 引言

在用一阶三角元计算磁场所得到的结果中, 相邻单元磁通密度通常不等, 所得到的是分片恒定的磁通密度及磁导率。在有限元后处理中, 尤其是在电机磁场有限元分析中, 根据有限元计算结果进一步计算电机所受电磁力及电磁转矩往往是计算磁场的目的之一。对于电机总的电磁力及电磁转矩的计算, 往往采用麦克斯韦应力法或虚位移方法^[1-5]。前者通常在气隙中取一个封闭的曲线或区域进行计算, 后者则可以直接计算整个区域的磁场能量。与计算电磁力分布对比, 总体力、力矩的计算方法已经比较成熟。

为了得到铁心内部以及铁心-空气界面上的电磁力密度, 文献 [4, 6-9]以麦克斯韦应力法、虚位移法为基础, 进一步研究了相应的计算方法。在推导计算公式时, 通常需要对磁场能量或磁导率求导数, 其中有的

方法需要对单元交界面两侧的微小区域的磁导率进行求导运算。为此,就需要得到单元交界面两侧磁通密度的平滑分布。但是,基于一阶三角元求解磁场所得到的单元交界面两侧磁通密度与磁导率不连续问题如何解决,迄今尚未见到相关文献。文献 [10]曾对磁场量的离散测量值进行光顺化处理,所采用的是六节点三角形等参与最小二乘法相结合的方法,不适合本文一阶三角元的情况。本文尝试用卷积方法解决这一难题。首先用局部有紧支集光滑函数与不连续磁通密度函数做卷积,得到光滑的近似磁通密度函数,进而基于局部虚位移方法求此光滑磁通密度函数的电磁力分布,然后令卷积核函数趋向于狄拉克函数,而电磁力分布函数的极限作为原不连续磁通密度函数对应的电磁力分布函数。

鉴于卷积通常用于信号分析 [11], 本文将其应用于有限元计算所得磁场分布的平滑化处理属于初次尝试,所以在文中首先推导了进行平滑化处理的基本公式,然后对比采用不同的核函数进行卷积运算所得到的结果,并给出求取平滑化处理核函数的一般方法。作为卷积方法的一个应用,最后得到考虑饱和时计算铁心内部电磁力密度的公式,并为铁心-空气交界面上惯用的电磁力密度公式的严格推导 [4]提供了数学依据。

2 平滑处理卷积运算的基本公式

设 $f(x)$, $g(x)$ 是欧式空间 \mathbf{R}^n 上的有界分段连续函数, 则卷积函数 $f * g(x)$ 定义为

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy \quad (1)$$

式中, $y \in \mathbf{R}$ 是积分变量, 所得函数为 \mathbf{R} 上的函数。为了方便描述卷积的性质, 把 f 称为核函数, g 为被卷积函数, 尽管实际上在卷积函数定义中 f 、 g 的地位是对称的, 并无区别。通常核函数取成有紧支集的有界函数, 而被卷积函数只要求分片连续即可定义卷积式 (1), 其中有紧支集的函数意思是此函数取值非零的部分是 \mathbf{R} 上的有界区域。当核函数是有紧支集的连续函数 f , 被卷积函数 g 为分片连续函数, 则卷积函数 $f * g$ 是连续可导的函数。

以下取一元函数为例, 说明如何利用卷积实现分片均匀函数交界面的平滑化。设分片均匀函数为

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中, x 坐标与分界线垂直, 零点在分界线上。假设希望在分界面两侧总宽度为 $2d$ 的范围实现平滑化。取核函数为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -d \text{ 或 } x > d \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \end{cases} \quad (3)$$

考虑式 (1) 中的被卷积函数 $f(x-y)g(y)$, 当 $y < 0$ 时, $g(y)=0$; 当 $x-y < -d$ 或 $x-y > d$ 时, $f(x-y)=0$, 亦即 $y < x-d$ 或 $y > x+d$ 时, $f(x-y)=0$ 。显然, 只有 $f(x-y)$ 与 $g(y)$ 同时非零时乘积 $f(x-y)g(y)$ 才非零, 所以式 (1) 中的实际积分区间是 $g(y)$ 的非零区间 $y \in [0, \infty)$ 与 $f(x-y)$ 的非零区间 $y \in [x-d, x+d]$ 的公共部分。

$$\begin{aligned} & \leq \\ & \leq \\ & \geq \end{aligned} \quad = \begin{cases} [x-d, x+d] \cap [0, \infty) \\ \emptyset & x+d < 0 \\ [0, x+d] & x-d < 0 < x+d \\ [x-d, x+d] & x-d > 0 \end{cases} \quad (4)$$

因此

$$\begin{aligned}
 f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \\
 &\begin{cases} < \\ \leq \leq \\ \geq \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & x < -d \\ \int_0^{x+d} f(x-y)dy & -d \leq x \leq d \\ \int_{x-d}^{x+d} f(x-y)dy & x > d \end{cases} \quad (5)
 \end{aligned}$$

3 平滑处理卷积运算的几个典型核函数

3.1 一阶斜坡卷积核函数

现在取一阶斜坡卷积核函数为例

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \leq \\ \leq \leq \\ \leq \leq \end{cases} \\
 f(x) &= \begin{cases} 0 & x < -d \text{ 或 } x > d \\ \frac{1}{d^2}x + \frac{1}{d} & -d \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{d^2}x + \frac{1}{d} & 0 \leq x \leq d \end{cases} \quad (6)
 \end{aligned}$$

$f(x)$ 满足式 (3) 中条件。在做卷积时，关键是要确定不同区间的 $f(x-y)$ 的具体表达式。为此，参考文献 [4] 的处理方法，借助图 1 可以方便地确定。

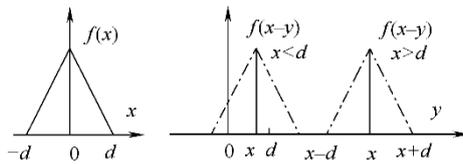


图 1 一阶核函数在 x 坐标系与 y 坐标系中的图像
Fig.1 A linear kernel function in x and y coordinates

当 $x \geq d$ 时，根据式 (5) 第三式，经过推导得到

$$* \quad f * g(x) = \int_{x-d}^{x+d} f(x-y)dy = 1 \quad (7)$$

当 $0 \leq x \leq d$ 时，式 (5) 第二式积分根据 $f(x-y)$ 表达式 (6) 分为 $(0, x)$ 与 $(x, x+d)$ 两段，推导可得

$$* \quad f * g(x) = -\frac{1}{2d^2}(x-d)^2 + 1 \quad (8)$$

当 $-d \leq x \leq 0$ 时， $y \geq 0$ 与 $x-d < y \leq x$ 不同时成立，因此式 (5) 第二式的积分只有对应于式 (6) 第二行中形式的 $f(x-y)$ 相应的积分出现，容易得到

$$* \quad f * g(x) = \frac{1}{2d^2}(x+d)^2 \quad (9)$$

式 (7) ~ 式 (9) 分别对应于卷积函数 $f * g(x)$ 在区间范围 $[d, \infty)$ 、 $[0, d]$ 、 $[-d, 0]$ 上的形式，考察在区间端点处的值，可以看出 $f * g(x)$ 是关于 x 的连续函数（实际上是一阶连续可导函数）， f 、 g 、 $f * g$ 的函数图像如图 2 所示。注意到间断函数 $g(x)$ 与一阶连续有紧支集函数 $f(x)$ 做卷积后得到一阶连续可

导函数 $f * g$ 。

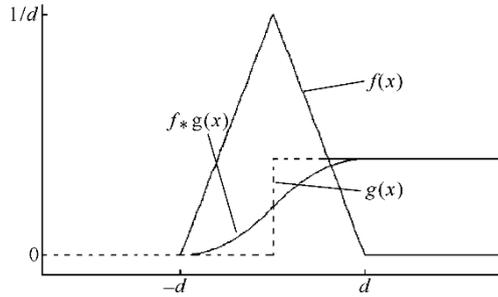


图2 一阶核函数和平滑后函数

Fig.2 A linear kernel function and a smoothed one

3.2 三角函数构造的核函数

设

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -\pi \text{ 或 } x > \pi \\ \frac{1 + \cos x}{2\pi} & -\pi \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (10)$$

若 g 如式 (2) 中定义, 则根据式 (5) 进一步推导可以得到卷积函数为

$$f * g(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} \frac{1}{2\pi} (1 + \cos(x-y)) g(y) dy$$

$$f * g(x) = \begin{cases} 0 & x < -\pi \\ \frac{1}{2\pi} (x + \pi + \sin x) & -\pi \leq x \leq \pi \\ 1 & x > \pi \end{cases} \quad (11)$$

$f(x)$ 、 $g(x)$ 与 $f * g(x)$ 这三个函数的图像如图 3 所示。

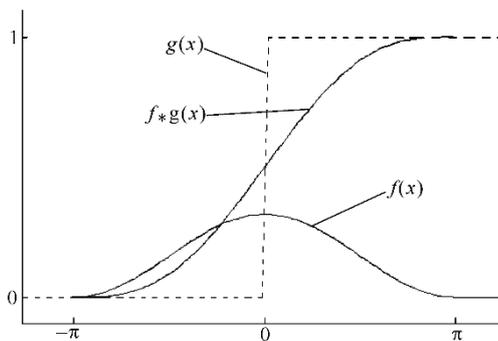


图3 三角函数核函数

Fig.3 A trigonometric kernel function

3.3 平滑处理卷积核函数的特点

3.3.1 光滑性

简单的数学运算可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f * g(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x-y)g(y)dy = f' * g \end{aligned} \quad (12)$$

若 f 是有紧支集的 k 阶连续可导函数, 则 $f^{(k)}$ 是有紧支集的连续函数, 重复利用上式, $(f * g)^{(k)}$ 可以表示成有紧支集连续函数 $f^{(k)}$ 与分片连续函数 g 的卷积, 是连续函数, 即 $f * g$ 为 k 阶连续可导函数。因此, 只要 f 有紧支集并且足够光滑, 即使 g 是分片连续函数, $f * g$ 仍然有很好的光滑性。

3.3.2 收敛性

任取有紧支集的光滑正函数 $\phi(x), x \in \mathbf{R}$ 且满足 $\int_{\mathbf{R}} \phi(x) dx = 1$, 则当正实数 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 经过伸缩变换得到的函数

$$\phi_{\varepsilon}(x) = (1/\varepsilon)\phi(x/\varepsilon) \quad (13)$$

在广义函数意义下趋向于狄拉克函数 $\delta(x)$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad \int_{\mathbf{R}} \delta(x) dx = 1 \quad (14)$$

而且若 $g(x)$ 是连续函数, 则卷积 $\phi_{\varepsilon} * g$ 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时趋向于 $\delta * g(x) = g(x)$; 也就是说通过与光滑核函数 ϕ_{ε} 函数做卷积可以使不光滑的函数 $g(x)$ 变得光滑, 反之让 $\varepsilon \rightarrow 0$ 可以将得到的光滑函数 $\phi_{\varepsilon} * g$ 还原为原来的不光滑函数 g 。

4 构造不同光滑度卷积核函数的方法

对于实际应用卷积对数据进行光滑化处理时, 根据具体问题的不同可能需要不同光滑程度的卷积核函数。若被卷积函数 g 是分片连续的, 卷积核函数 f 是 k 阶连续可导的, 则卷积 $f * g$ 也是至少 k 阶连续可导的。连续 k 阶可导的有紧支集卷积核函数 ψ_k 可以如下递归地构造。

若 $k=0$, 可以取矩形脉冲函数 *

$$\psi_0 = \begin{cases} 0 & x \notin [0, 1] \\ 1 & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (15)$$

则 $\psi_{k+1} = \psi_k * \psi_0$ 是 $k+1$ 阶连续可导的有紧支集的卷积核函数。应用 Laplace 变换可以求得 ψ_k 的表达式为

$$\begin{aligned} L(\psi_0) &= \frac{1}{s}(1-e^{-s}) \\ L(\underbrace{\psi_0 * \psi_0 * \dots * \psi_0}_{k \text{ 重}}) &= \left[\frac{1}{s}(1-e^{-s}) \right]^k \\ \psi_{k-1} &= L^{-1}(s^{-k}(1-e^{-s})^k) = L^{-1}\left(\sum_{j=0}^k C_k^j s^{-k} (-1)^j e^{-sj}\right) \\ &= \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^j \max(x-j, 0)^{k-1} / (k-1)! \end{aligned}$$

其中, 第一个式子可以由拉普拉斯变换表得到, 第二个式子由于拉普拉斯变换将函数的卷积变为函数的乘积, 第三个式子为二项式定理, C_k^j 为组合数, 第四个式子由拉普拉斯变换查表得到。 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 的图像如图 4 所示, 三个卷积核函数一次为连续, 一阶连续可导, 二阶连续可导, 它们的支集分别为区间 $[0,$

2]、[0, 3]、[0, 4], 在具体应用中可以根据需要通过伸缩变换式 (13) 调整卷积核函数支集的大小。

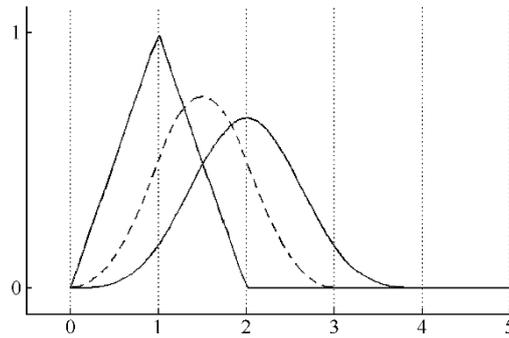


图4 不同光滑度的核函数

Fig.4 Kernel functions of different smoothness

5 在有限元磁场分析中计算电磁力密度的卷积方法

对电机磁场采用一阶三角元进行分析时, 则在各单元内部磁通密度、磁导率及磁场能量密度是常量, 但在三角元的边界处不连续。在根据磁场能量求电磁力密度的经典方法中 [2,4,7-9], 大都涉及能量密度或磁导率对位移的导数。于是, 如何得到磁通密度、磁导率的平滑分布就成为求取电磁力的一个关键环节。本节研究如何采用卷积方法求取电磁力密度。

以平面场为例, 选取 $\psi(x,y)$ 为二元有紧支集光滑函数, 并且使 ψ 的支集在以 0 为圆心, 1 为半径的圆盘内。例如可取 $\psi(x,y)=f(x)f(y)$, 其中 $f(x)$ 由式 (10) 定义。此处 $f(x)$ 只有一阶连续导数。非线性磁导率下, 参考文献 [7] 局部虚位移的思路, 可以得到在磁通密度平滑化后的电磁力体密度公式

$$F = -\nabla \int \frac{B}{\mu(B)} dB = -\nabla G(B) \quad (16)$$

式中, $G(B)$ 为能量函数。取 $\varepsilon > 0$ 表示式 (13) 前面所采用的伸缩系数, $\psi_\varepsilon * B$ 为平面上光滑的函数是磁通密度 B 的近似值, 对 $\psi_\varepsilon * B$ 套用式 (16), 可以得到电磁力体密度的近似公式 $F_\varepsilon = -\nabla G(\psi_\varepsilon * B)$ 。

由于有限元计算给出的 B 是片常数的函数, $\psi_\varepsilon * B$, 进而 $G(\psi_\varepsilon * B)$ 只在 B 的不连续点附近不是常数, 因此 $F_\varepsilon = -\nabla G(\psi_\varepsilon * B)$ 只在 B 的不连续点附近是非零的。此处的“ B 的不连续点附近”实际上就是到三角元边界距离在 ε 范围内的点。如果让 $\varepsilon \rightarrow 0$ 则 F_ε 集中分布于三角元的边和顶点上。考虑在三角元边界处 $\psi_\varepsilon * B$ 的性质, $\psi_\varepsilon * B$ 是连续可导函数, 在 ε 距离上的函数值变化为固定值 $B_1 - B_2$, 其中 B_1 、 B_2 分别为边界两边三角元上 B 的值。因此 $\psi_\varepsilon * B$ 的导数随 ε 以 $1/\varepsilon$ 量级变化, 进而 $F_\varepsilon = -\nabla G(\psi_\varepsilon * B) = -G' \nabla(\psi_\varepsilon * B)$ 也以同样的量级变化。到三角元顶点距离为 ε 的集合的面积为 ε^2 量级, 相乘可得 $\varepsilon^2 * 1/\varepsilon = \varepsilon$ 量级。当时, F_ε 在三角元顶点处的极限分布为 0。

考虑在三角元的边界上的一点 p , B 沿着边界的方向导数是 0, 因此根据类似于式 (12) 的卷积公式易知, $\psi_\varepsilon * B$ 沿着边界的方向导数也是 0, 所以体电磁力密度 $F_\varepsilon = -G' \nabla \psi_\varepsilon * B$ 是垂直于三角元的边界的。

设线段 I 垂直于边界, 过 p 且以 p 为中点, 长度为 2ε , 则在 I 的两个端点处 $\psi_\varepsilon * B$ 的值分别为 B_1, B_2 , 在

I 上电磁力体密度的积分为

$$-\int_I \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{G}(\psi_\varepsilon * B) du = -\mathbf{G}(\psi_\varepsilon * B) \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \mathbf{G}(B_1) - \mathbf{G}(B_2) \tag{17}$$

因此在 I 上的总电磁力表达式 $\mathbf{G}(B_1) - \mathbf{G}(B_2)$ 和卷积核函数选择无关，只与所采用的非线性情形下的体电磁力表达式 (16) 有关。考虑到 \mathbf{G} 的定义，此表达式可以进一步化为

$$\mathbf{G}(B_1) - \mathbf{G}(B_2) = \int_{B_2}^{B_1} \frac{B}{\mu(B)} dB \tag{18}$$

进一步分析 $\mathbf{G}(B_1) - \mathbf{G}(B_2)$ 的物理意义。在式 (17) 中， $\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{G}(\psi_\varepsilon * B)$ 代表在三角元棱边两侧的过渡层中单位体积内沿与棱边垂直方向的电磁力，积分后得到该过渡层单位面积内沿与棱边垂直方向的电磁力。当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，所得到的公式 (18) 就代表三角元一条边上电磁力的面密度，乘以边长及电机铁心长度就得到作用于该棱边上总的电磁力，进而可以求出其他两条边上的电磁力、三角元所受到的总电磁力以及电磁力体密度。

对于铁心与空气交界面，采用卷积方法得到平滑的磁通密度与磁导率分布后，进而容易求出电磁力面密度。文献 [12] 通过求解过渡区域的拉普拉斯方程，得到与文献 [4,7] 一致的边界电磁力面密度公式

$$f = \frac{\mu_{Fe} - \mu_0}{2\mu_{Fe}\mu_0} (B_n^2 + \mu_{Fe}\mu_0 H_\tau^2) \tag{19}$$

该公式虽然在许多文献中均有介绍，但是，迄今未见严格的数学证明。采用卷积方法得到分界面两侧光滑的磁导率分布，可以认为是文献 [4] 推导过程的一个数学依据。

算例：图 5 是某汽轮发电机转子大齿后侧尖角区域简图，其中示意性地标出了在有限元分析中所用的节点与单元编号。下表列出了部分单元磁通密度及按照式 (18) 计算所得到的相关棱边上的电磁力面密度的大小。

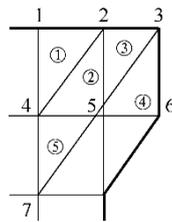


图 5 计算实例

Fig.5 A computational example

表 铁心内部单元交界面处电磁力面密度

Tab. Surface force densities between interior elements inside the iron

单元号	①	②	③	④	⑤
磁通密度 B/T	1.219	2.087	1.932	2.027	1.887
棱边代号	2-4	2-5	3-5	4-5	
电磁力面密度 $f / (N \cdot m^{-2})$	22 909	17 128	8088	18 672	

6 结论

在用有限元方法计算磁场的后处理阶段，本文采用卷积方法得到在相邻单元过渡区域平滑分布的磁通密度

及磁导率。给出了进行平滑化处理的卷积运算基本公式, 及求取平滑化处理卷积核函数的一般方法; 作为卷积方法的一个应用, 得到考虑饱和时计算铁心内部电磁力密度的公式, 并为计算铁心 - 空气交界面电磁力密度公式的推导提供了数学依据。

参考文献

- [1] Grabner C, Schmidt E. Torque calculation of electrical machines based on distributions of surface forces along the stator boundary as well as volume forces inside conducting and iron domains[C]. IEEE Electric Machines and Drives Conf., IEMDC'03, 2003, 1: 595-600.
- [2] David G Dorrell, Mircea Popescu, Malcolm I McGilp. Torque calculation in finite element solutions of electrical machines by consideration of stored energy[J]. IEEE Trans. Magnetics, 2006, 42(10): 3431-3433.
- [3] Ramón Castillo, José M Cañedo. A 2-D finite-element formulation for unambiguous torque calculation[J]. IEEE Trans. Magnetics, 2008, 44(3):373-376.
- [4] 汤蕴璆. 电机内的电磁场 [M]. 2版. 北京: 科学出版社, 1998.
- [5] 杨玉波, 王秀和, 张鑫,等. 磁极偏移削弱永磁电机齿槽转矩方法 [J]. 电工技术学报, 2006, 21(10): 22-25.
Yang Yubo, Wang Xiuhe, Zhang Xin, et al. Cogging torque reduction method of magnet shifting in permanent magnet motors[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2006, 21(10):22-25.
- [6] Lieven Vandeveld, Johan J C Gyselinck, Jan A A Melkebeek. Long-range magnetic force and deformation calculation using the 2D finite element method[J]. IEEE Trans. Magnetics, 1998, 34(5): 3540-3543.
- [7] Benhama A, Williamson A C, Reece A B J. Virtual work approach to the computation of magnetic force distribution from finite element field solutions[J]. IEE Proc-Electr. Power Appl, 2000, 147(6): 437-442.
- [8] Lieven Vandeveld, Jan A A Melkebeek. A survey of magnetic force distributions based on different magnetization models and on the virtual work principle[J]. IEEE Trans. Magnetics, 2001, 37(5): 3405-3409.
- [9] Motoasca T Emilia, Hans Blok, Martin D Verweij, et al. Electromagnetic forming by distributed forces in magnetic and nonmagnetic materials[J]. IEEE Trans. Magnetics, 2004, 40(5):3319-3330.
- [10] 杨慎华, 寇淑清, 冯肇华. 光顺化有限元技术在电磁场数据处理中的应用 [J]. 计量学报, 1999, 20(2): 136-142.
Yang Shenhua, Kou Shuqing, Feng Zhaohua. Application of smoothing finite element technique in processing measured data of electromagnetic fields[J]. Acta Metrologica Sinica, 1999, 20(2):136-142.
- [11] 郑君里, 应启珩, 杨为理. 信号与系统: 上册 [M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- [12] Luo Wei, Li Zhiqiang. A convolution method to compute magnetic force distributions[C]. Proc. Of the 13th Biennial IEEE Conf. on Electromagnetic Field Computation, Athens, Greece, 2008:223.

作者简介: 罗炜 男, 1975年生, 博士, 讲师, 研究方向为微分几何、计算机图形学和数值分析。 李志强 男, 1978年生, 博士研究生, 主要从事电机磁场数值分析以及稀土永磁电机方面的研究。