基于伪周期的 Halbach 永磁阵列三维磁场端部效应建模研究

宋玉晶 张 鸣 朱 煜 李 鑫
（清华大学机械工程系 北京 100084）

摘要 对于无铁芯动铁式长行程平面电机，其动子 Halbach 永磁阵列端部磁场的畸变将产生端部效应，由其引起的推力波动将影响平面电机定位与运动精度。建立准确的包含端部磁场的 Halbach 永磁阵列三维磁场数学解析模型，是电机推力建模、避免推力波动、提高端部磁场利用率及降低单个线圈能耗的基础。以无铁芯动铁式永磁同步平面电机动子 Halbach 永磁阵列为研究对象，分析了 Halbach 永磁阵列中磁场类正弦区与端部畸变区的磁场特性，通过将 Halbach 永磁阵列外边缘磁场衰减至零的特征边界间距定义为机械伪周期，并采用新的傅立叶级数及空间积分技术，推导出了完整的 Halbach 永磁阵列全空间磁场三维数学解析表达式。通过与有限元计算及现有磁场解析计算方法的对比，结果验证了提出的磁场建模方法的准确有效性。

关键词：平面电机 Halbach 永磁阵列 端部效应 机械伪周期 磁场建模
中图分类号：TM153

Three Dimensional Magnetic Field End-effect Modeling for Halbach Permanent Magnet Array Based on Pseudo Periodic

Song Yujing Zhang Ming Zhu Yu Li Xin
（Tsinghua University Department of Mechanical Engineering Beijing 100084 China）

Abstract As to ironless long-stroke planar motor with moving permanent magnet, the distortion of the magnetic field at the end of Halbach permanent magnet array will cause the end-effect, and the positioning and moving precision will be influenced by the thrust ripple caused by end-effect. Therefore, establishing an accurate three dimensional analytical model containing the magnetic field at the end of Halbach permanent magnet array is an important foundation for force modeling, avoiding the thrust ripple, improving the utilization rate of the end magnetic field, and reducing the energy-consuming of each coil. Take ironless synchronous planar motor with moving permanent magnet for study, the magnetic field properties at the sine-like and end-distorted area are analyzed. The mechanical pseudo cycle is defined by the distance between zero magnetic field characteristic boundaries, and then a completed three dimensional analytical magnetic field model of Halbach permanent magnet array is derived by the new Fourier series and spatial integral technology. Finally, the accuracy and effectiveness of the magnetic field modeling method proposed in this paper are verified by comparing with the finite element and the existing analytical calculation approach.

Keywords：Planar motor, Halbach permanent magnet array, end-effect, mechanical pseudo-periodic, magnetic field modeling

收稿日期 2014-09-10

1　引言

在半导体、集成电路、航空航天等高端机电装备领域中，对载物平台的多自由度运动能力的任务需求已逐步提高。由多个直线电机单元组成的叠层结构能够实现多自由度运动，但存在机械结构复杂、误差累积传递及非质心驱动等不足，不利于满足高速高精度的运动要求。由单一构件实现多自由度运动的平面电机，能够有效解决上述问题，其关键技术已成为高端制造装备领域的研究热点。平面电机一般分为动圈式和动铁式两种。其中动铁式平面电机将线圈单元作为电机定子，将永磁阵列作为电机动子。线圈单元布置于基座上，通过底层的水冷可以有效解决电机的散热问题。同时，动铁式结构避免了线圈线缆的外部力扰动，且具有无机械接触、控制带宽高等优点，为精密超精密的精度生成奠定了重要基础。

磁悬浮动铁式平面电机动子主要采用 Halbach 永磁阵列的结构形式[1][2]。为满足长行程运动需求，动子永磁阵列沿运动方向长度小于定子线圈阵列长度，这使得永磁阵列的端部将产生磁场端部效应，进而影响电机的推力大小并产生推力波动[5]。在永磁阵列中段区域内，其磁场强度为类正弦形式，目前已有文献给出了该区域内磁场的解析模型[2]。在永磁阵列的边缘区域内，由于磁力线的畸变，在此边缘区域内将产生较为复杂的推力，这部分推力被称为端部效应[3-5]。为避免由磁场端部效应引起的推力波动，可以采用端部区域处线圈不通电的方法，即对永磁阵列类正弦区磁场完全覆盖的线圈进行通电，而永磁阵列边缘畸变磁场区覆盖的线圈通电电流为零[2,6]。此方法虽然有效避免了推力波动，但端部磁场没有被充分利用，降低了磁场利用率，减小了电机推力常数，增加了单个线圈的电流大小及功耗。因此，如果能够建立准确的端部磁场模型，便可以通过积分计算出端部磁场产生的推力，通过对此部分推力进行补偿即可解决端部效应引起的推力波动。基于端部推力模型，便可以对处于磁场边缘处的线圈通电，进而增加了通电线圈数目，在相同推力情况下，每个线圈分担的电流密度小于文献[2]的单个线圈电流，从而能够降低功耗。

现有文献对 Halbach 永磁阵列的研究中，磁场建模方法主要采用文献[1,2,7]给出的计算方法，该方法将永磁阵列长度假设为无限长，将端部畸变特性用类正弦函数近似处理，因此基于此种假设条件的端部磁场求解存在计算误差，将影响推力建模的准确性及电机结构设计。文献[8,9]通过查表法解决了端部效应问题，但该方法仅适用于已知电机的磁场与推力数据存储，不能反映出推力与磁场结构参数之间的关系，且较大的数据量不利于工程实际应用。为减小端部效应的影响，Achterberg J[10]设计了推力建模误差补偿项，但该方法增加了线圈电流分配及切换的复杂性。文献[11,12]采用磁荷法建立了磁场的解析模型，虽然可以表达永磁阵列端部的磁场分布，但该方法是将单块永磁体产生的磁场进行叠加，当永磁阵列含有较多块永磁体时，存在计算量大的不足，不利于工程实际应用。

建立出 Halbach 永磁阵列端部磁场解析模型，能够为电机推力波动建模、磁场优化设计及控制器设计提供理论依据。根据端部磁场模型求解出端部磁场产生的推力，可以避免推力波动，进而为解决端部效应问题奠定重要基础。因此，建立包含端部磁场的 Halbach 永磁阵列磁场解析求解方法，具有重要的理论研究意义及工程应用价值。但目前所查文献中，还未见具体的端部磁场解析求解方法。

论文以平面电机 Halbach 永磁阵列磁场建模为研究对象，将永磁体外边缘处磁场衰减至零的边界线的间距定义为机械伪周期常数[19]，将此常数作为修正的傅立叶级数的周期，采用空间积分技术，建立了包含端部磁场的永磁阵列全空间磁场三维解析求解模型。通过与有限元法及文献[1]中计算方法的对比，验证了所提方法的准确有效性。

2　Halbach 永磁阵列磁场分布

动铁式平面电机主体结构形式如图 1 所示。定子线圈阵列布置于基座中，线圈通电流时动子 Halbach 永磁阵列受洛仑兹力作用实现沿 Z 方向悬浮及沿平面内 X、Y 方向的长行程运动。

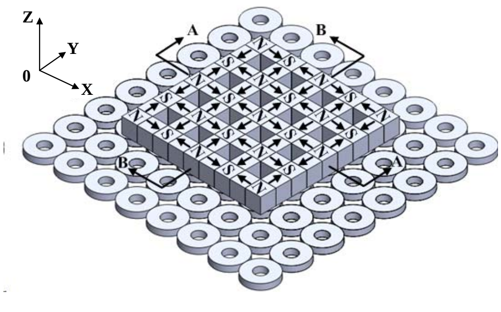
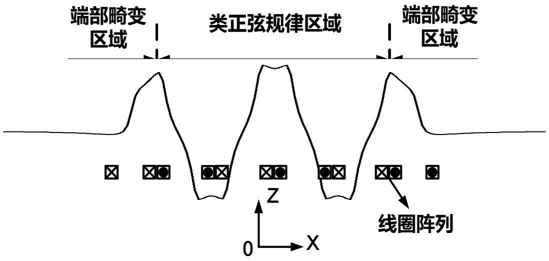


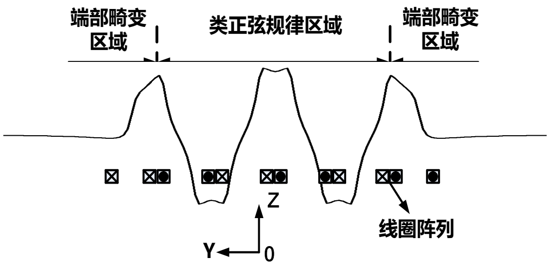
图 1　动铁式平面电机主体结构

Fig.1　Planar motor structure with moving permanent magnet

为说明磁场在端部的畸变特性，对永磁阵列沿图 1 中 A-A 面及 B-B 面的剖视图进行分析，对应的磁感应强度 Bz 曲线如图 2 所示。



（a）A-A 面磁感应强度 Bz 曲线



（b）B-B 面磁感应强度 Bz 曲线

图 2 磁感应强度 Bz 曲线

Fig.2 Magnetic field Bz curve

图 2（a）中的曲线表示磁感应强度 Bz 在剖面 A-A 中沿 X 方向的变化，图 2（b）中的曲线表示磁感应强度 Bz 在剖面 B-B 中沿 Y 方向的变化。可以看出，Halbach 永磁阵列磁场分布可划分为两个区域，即类正弦区与端部畸变区。在类正弦区中，磁感应强度由正弦基波及高次谐波分量组成，文献[2]中已给出了其具体的解析求解式。对于畸变区内磁感应强度的求解，由于磁场发生严重畸变而不再具有类正弦性，其严重的非线性特性增加了此处磁场求解的困难，由此部分磁场产生的推力波动被称为端部效应[13-15]。文献[1]在假设永磁阵列为无限长的条件下，将类正弦性引入到端部磁场的求解中，给出了端部磁场的近似解。但该方法仅满足低精度的任务需求，且该近似解无法指导磁场结构设计及电机推力建模。

另一方面，为避免端部效应，可以采用图 3 中的线圈通电策略，即仅对正方形虚线框围成的磁场类正弦区下方的线圈通电，边缘处线圈不通电流。但此种工况下端部磁场没有被完全有效利用，因此该方法降低了磁场利用率，进而减小了电机推力常数，增加了单个线圈的电流密度大小及能耗。

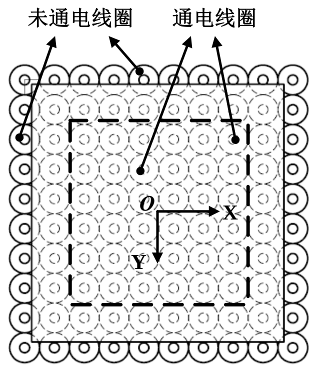


图 3 避免端部效应的线圈通电策略

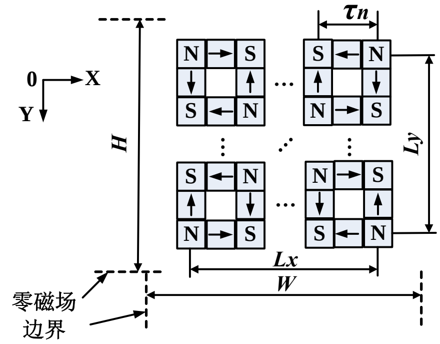
Fig.3 Scheme for avoiding the end-effect

由此可以看出，考虑端部效应建立出 Halbach 永磁阵列磁场三维解析模型，可以避免推力波动的产生，有效解决端部效应问题，进而可以增加端部处通电线圈的数量，减小单个线圈的能耗。因此对端部磁场建模方法的研究，将对精密超精密运动系统设计奠定重要的理论基础。

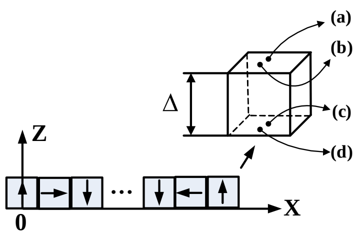
3 基于伪周期的磁场三维解析建模

3.1 机械伪周期常数

不失一般性，平面电机 Halbach 永磁阵列广义模型如图 4 所示。



（a）模型俯视图



（b）模型主视图

图 4 Halbach 永磁阵列广义模型

Fig.4 Generalized model of Halbach permanent magnet array

图 4 模型中笛卡尔坐标系 O_{XYZ} 位于永磁阵列下表面，除了永磁体和电流区域外其它区域均为自由

空间。永磁体为正方体且其宽度为Δ，电机极距为 τ_n，永磁阵列沿 X 方向的类正弦区长度为 L_x，沿 Y 方向的类正弦区长度为 L_y。图 4 中（b）、（a）面分别为永磁阵列顶面的内、外表面，（c）、（d）面分别为永磁阵列底面的内、外表面。

由于 N 极与 S 极的交错排布，使得磁场具有周期性，因此针对 L_x 及 L_y 长度范围内的磁场，现有文献中主要采用傅立叶级数进行计算[16,17]。傅立叶级数的周期即为电机的极距的 2 倍 $2\tau_n$，因此第 n 次谐波的空间波数为 $k_n=2\pi n/(2\tau_n)$。

为求得包含端部处磁场的全空间磁场解析模型，论文以永磁阵列外边缘磁场衰减至零的边线为特征边界，对边界内磁场进行空间积分。考虑到傅立叶级数求解时的周期性，将零磁场边界线间距作为一个积分周期，并将此间距定义为机械伪周期常数。根据磁场的周期性，采用傅立叶级数表达磁场可以方便求解计算。与现有文献所用方法不同，论文将定义的机械伪周期常数作为新的傅立叶级数周期，对该周期内的磁场采用空间积分技术进行精细计算。因此，图 4 中 Halbach 永磁阵列沿 X 方向的傅立叶级数周期为 H，沿 Y 方向的傅立叶级数周期为 W。根据文献[18,19]，在距永磁阵列边缘约 τ_n 处时磁场将衰减至零，因此修正的傅立叶级数周期为：

$$H = L_x + 2\tau_n \tag{1}$$

$$W = L_y + 2\tau_n \tag{2}$$

因此沿 X 方向及 Y 方向的 n、m 次谐波的空间波数分别为：$k_n = 2\pi n/H$，$k_m = 2\pi m/W$。

3.2　磁场基本方程

Halbach 永磁阵列可以近似为稳静磁场[20]，因此根据麦克斯韦方程可得：

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度，$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度，$\boldsymbol{J}$ 为线圈通电电流密度。

对于磁化强度为 $\boldsymbol{M}$ 的磁性材料，其磁感应强度与磁场强度之间的转化关系为：

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) \tag{5}$$

由于矢量旋度的散度恒等于 0，因此矢量磁势 $\vec{A}$ 为：

$$\vec{B} \equiv \nabla\times\vec{A} \tag{6}$$

则

$$\nabla\times\vec{B} = \nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \tag{7}$$

在恒定磁场中，有库伦规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0$，则

$$\nabla\times\vec{B} = -\nabla^2\vec{A} \tag{8}$$

根据上述方程可得泊松方程为：

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0(\vec{J}+\nabla\times\vec{M}) \tag{9}$$

在永磁体区域内部没有自由电流，因此有

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} = 0 \tag{10}$$

$$\nabla\times\vec{B} = -\nabla^2\vec{A} = \mu_0\nabla\times\vec{M} \tag{11}$$

可以看出，只要根据式（9）求解出矢量磁势 $\vec{A}$，即可利用式（6）得到磁感应强度 $\vec{B}$ 的解析表达式。

3.3　磁场空间积分求解

根据图 4 的笛卡尔坐标系 O_{XYZ}，永磁阵列下方空间任一点（x,y,z）处，磁化强度 $\boldsymbol{M}$、磁势 $\boldsymbol{A}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 为沿 X、Y、Z 方向各次谐波的叠加[1]，即：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} = M_x\boldsymbol{i}_x + M_y\boldsymbol{i}_y + M_z\boldsymbol{i}_z = &\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\tilde{M}_{xnm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my}\boldsymbol{i}_x\right) + \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\tilde{M}_{ynm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my}\boldsymbol{i}_y\right) + \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\tilde{M}_{znm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my}\boldsymbol{i}_z\right)\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{i}_x + A_y\boldsymbol{i}_y + A_z\boldsymbol{i}_z \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\tilde{A}_{xnm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my}\boldsymbol{i}_x\right) + \\ &\quad\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\tilde{A}_{ynm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my}\boldsymbol{i}_y\right) + \\ &\quad\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\tilde{A}_{znm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my}\boldsymbol{i}_z\right)\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= B_x\boldsymbol{i}_x + B_y\boldsymbol{i}_y + B_z\boldsymbol{i}_z \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\tilde{B}_{xnm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my}\boldsymbol{i}_x\right) + \\ &\quad\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\tilde{B}_{ynm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my}\boldsymbol{i}_y\right) + \\ &\quad\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\tilde{B}_{znm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my}\boldsymbol{i}_z\right)\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{M}_x$、$\boldsymbol{M}_y$、$\boldsymbol{M}_z$ 分别为沿 X、Y、Z 方向的磁

化成分，$\boldsymbol{A}_x$、$\boldsymbol{A}_y$、$\boldsymbol{A}_z$ 分别为沿 X、Y、Z 方向的磁势，$\boldsymbol{B}_x$、$\boldsymbol{B}_y$、$\boldsymbol{B}_z$ 分别为沿 X、Y、Z 方向的磁感应强度 $(\tilde{\bullet})$ 为对应项的傅立叶系数。

根据式（1）与式（2）定义的傅立叶级数周期，式（12）中磁化强度傅立叶系数的空间积分表达形式为：

$$\tilde{M}_{xnm}=\frac{1}{HW}\int_0^H\int_0^W M_x e^{jk_nx}e^{jk_my}dxdy \qquad (15)$$

$$\tilde{M}_{ynm}=\frac{1}{HW}\int_0^H\int_0^W M_y e^{jk_nx}e^{jk_my}dxdy \qquad (16)$$

$$\tilde{M}_{znm}=\frac{1}{HW}\int_0^H\int_0^W M_z e^{jk_nx}e^{jk_my}dxdy \qquad (17)$$

根据式（11），磁矢势沿三维空间的标量泊松方程为：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_{xnm}=-j\mu_0k_m\tilde{M}_{znm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my} \qquad (18)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_{ynm}=j\mu_0k_n\tilde{M}_{znm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my} \qquad (19)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_{znm}=j\mu_0k_m\tilde{M}_{xnm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my}-j\mu_0k_n\tilde{M}_{ynm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my} \qquad (20)$$

对于图 4（b）中的 c 表面，即 $z=0$ 时，有：

$$A_{xnm}=\tilde{A}^c_{xnm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my} \qquad (21)$$

$$A_{ynm}=\tilde{A}^c_{ynm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my} \qquad (22)$$

$$A_{znm}=\tilde{A}^c_{znm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my} \qquad (23)$$

同理对于图 4b 中的 b 表面，即 $z=\Delta$ 时，有：

$$A_{xnm}=\tilde{A}^b_{xnm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my} \qquad (24)$$

$$A_{ynm}=\tilde{A}^b_{ynm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my} \qquad (25)$$

$$A_{znm}=\tilde{A}^b_{znm}e^{-jk_nx}e^{-jk_my} \qquad (26)$$

求解上述方程可得：

$$\tilde{A}_{xnm}=\left(\tilde{A}^b_{xnm}-j\mu_0\frac{k_m\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\frac{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}z}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}-\left(\tilde{A}^c_{xnm}-j\mu_0\frac{k_m\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\frac{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}(z-\Delta)}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}+\frac{j\mu_0k_m\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2} \qquad (27)$$

$$\tilde{A}_{ynm}=\left(\tilde{A}^b_{ynm}+j\mu_0\frac{k_n\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\frac{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}z}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}-\left(\tilde{A}^c_{ynm}+j\mu_0\frac{k_n\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\frac{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}(z-\Delta)}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}-\frac{j\mu_0k_n\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2} \qquad (28)$$

$$\tilde{A}_{znm}=\left(\tilde{A}^b_{znm}+j\mu_0\frac{k_m\tilde{M}_{xnm}-k_n\tilde{M}_{ynm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\frac{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}z}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}-\left(\tilde{A}^c_{znm}+j\mu_0\frac{k_m\tilde{M}_{xnm}-k_n\tilde{M}_{ynm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\frac{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}(z-\Delta)}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}-j\mu_0\frac{k_m\tilde{M}_{xnm}-k_n\tilde{M}_{ynm}}{k_n^2+k_m^2} \qquad (29)$$

由式（6），可以计算得到空间任意位置处磁场强度 $\boldsymbol{B}$，具体解析表达式如下：

$$\tilde{B}_{xnm}=\left(\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}^b_{ynm}+j\mu_0\frac{k_n\tilde{M}_{znm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\frac{\cosh\sqrt{k_n^2+k_m^2}z}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}-\left(\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}^c_{ynm}+j\mu_0\frac{k_n\tilde{M}_{znm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\frac{\cosh\sqrt{k_n^2+k_m^2}(z-\Delta)}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}+\left(jk_m\tilde{A}^b_{znm}-\mu_0\frac{k_m^2\tilde{M}_{xnm}-k_nk_m\tilde{M}_{ynm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\frac{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}z}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}+\left(-jk_m\tilde{A}^c_{znm}+\mu_0\frac{k_m^2\tilde{M}_{xnm}-k_nk_m\tilde{M}_{ynm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\frac{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}(z-\Delta)}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}+\mu_0\frac{k_m^2\tilde{M}_{xnm}-k_nk_m\tilde{M}_{ynm}}{k_n^2+k_m^2} \qquad (30)$$

$$\tilde{B}_{ynm}=\left(-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}^b_{xnm}+j\mu_0\frac{k_m\tilde{M}_{znm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\frac{\cosh\sqrt{k_n^2+k_m^2}z}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}+\left(\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}^c_{xnm}-j\mu_0\frac{k_m\tilde{M}_{znm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\frac{\cosh\sqrt{k_n^2+k_m^2}(z-\Delta)}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}+\left(-jk_n\tilde{A}^b_{znm}+\mu_0\frac{k_nk_m\tilde{M}_{xnm}-k_n^2\tilde{M}_{ynm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\frac{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}z}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}+\left(jk_n\tilde{A}^c_{znm}-\mu_0\frac{k_nk_m\tilde{M}_{xnm}-k_n^2\tilde{M}_{ynm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\frac{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}(z-\Delta)}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}-\mu_0\frac{k_nk_m\tilde{M}_{xnm}-k_n^2\tilde{M}_{ynm}}{k_n^2+k_m^2} \qquad (31)$$

$$\tilde{B}_{znm}=\left(-jk_m\tilde{A}_{xnm}^b+jk_n\tilde{A}_{ynm}^b-\mu_0\tilde{M}_{znm}\right)\frac{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}z}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}+\left(jk_m\tilde{A}_{xnm}^c-jk_n\tilde{A}_{ynm}^c+\mu_0\tilde{M}_{znm}\right)\frac{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}(z-\Delta)}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}+\mu_0\tilde{M}_{znm} \tag{32}$$

另一方面，在图 4b 中的 b 表面处（$z=\Delta$），有：

$$\tilde{B}_{xnm}^b=jk_m\tilde{A}_{znm}^b+\left(\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}_{ynm}^b+j\mu_0\frac{k_n\tilde{M}_{znm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\frac{\cosh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}-\left(\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}_{ynm}^c+j\mu_0\frac{k_n\tilde{M}_{znm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\frac{1}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta} \tag{33}$$

$$\tilde{B}_{ynm}^b=-jk_n\tilde{A}_{znm}^b+\left(-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}_{xnm}^b+j\mu_0\frac{k_m\tilde{M}_{znm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\frac{\cosh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}+\left(\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}_{xnm}^c-j\mu_0\frac{k_m\tilde{M}_{znm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\frac{1}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta} \tag{34}$$

$$\tilde{B}_{znm}^b=jk_n\tilde{A}_{ynm}^b-jk_m\tilde{A}_{xnm}^b \tag{35}$$

在图 4（b）中的 c 表面处（z=0），有：

$$\tilde{B}_{xnm}^c=jk_m\tilde{A}_{znm}^c+\left(\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}_{ynm}^b+j\mu_0\frac{k_n\tilde{M}_{znm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\frac{1}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}-\left(\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}_{ynm}^c+j\mu_0\frac{k_n\tilde{M}_{znm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\frac{\cosh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta} \tag{36}$$

$$\tilde{B}_{ynm}^c=-jk_n\tilde{A}_{znm}^c+\left(-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}_{xnm}^b+j\mu_0\frac{k_m\tilde{M}_{znm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\frac{1}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}+\left(\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}_{xnm}^c-j\mu_0\frac{k_m\tilde{M}_{znm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\frac{\cosh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}{\sinh\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta} \tag{37}$$

$$\tilde{B}_{znm}^c=jk_n\tilde{A}_{ynm}^c-jk_m\tilde{A}_{xnm}^c \tag{38}$$

根据极限 $\lim_{x\to\pm\infty}\coth=\pm1$ 及 $\lim_{x\to\pm\infty}\sinh=\pm\infty$，在上表面 a 以上和下表面 b 以下的半无穷区域，计算得到如下公式：

$$\tilde{B}_{xnm}^a=jk_m\tilde{A}_{znm}^a-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}_{ynm}^a \tag{39}$$

$$\tilde{B}_{ynm}^a=-jk_n\tilde{A}_{znm}^a+\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}_{xnm}^a \tag{40}$$

$$\tilde{B}_{znm}^a=jk_n\tilde{A}_{ynm}^a-jk_m\tilde{A}_{xnm}^a \tag{41}$$

$$\tilde{B}_{xnm}^d=jk_m\tilde{A}_{znm}^d+\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}_{ynm}^d \tag{42}$$

$$\tilde{B}_{ynm}^d=-jk_n\tilde{A}_{znm}^d-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{A}_{xnm}^d \tag{43}$$

$$\tilde{B}_{znm}^d=jk_n\tilde{A}_{ynm}^d-jk_m\tilde{A}_{xnm}^d \tag{44}$$

根据文献[1]给出的边界条件可得：

$$\tilde{A}_{xnm}^a=\tilde{A}_{xnm}^b \tag{45}$$

$$\tilde{A}_{xnm}^c=\tilde{A}_{xnm}^d \tag{46}$$

$$\tilde{A}_{ynm}^a=\tilde{A}_{ynm}^b \tag{47}$$

$$\tilde{A}_{ynm}^c=\tilde{A}_{ynm}^d \tag{48}$$

$$\tilde{A}_{znm}^a=\tilde{A}_{znm}^b \tag{49}$$

$$\tilde{A}_{znm}^c=\tilde{A}_{znm}^d \tag{50}$$

由式（45）至式（50）可以求得：

$$\tilde{A}_{xnm}^b=\tilde{A}_{xnm}^a=\frac{\mu_0}{2}\left(-\frac{\tilde{M}_{ynm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}+j\frac{k_m\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\left(1-e^{-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}\right) \tag{51}$$

$$\tilde{A}_{xnm}^c=\tilde{A}_{xnm}^d=\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{\tilde{M}_{ynm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}+j\frac{k_m\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\left(1-e^{-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}\right) \tag{52}$$

$$\tilde{A}_{ynm}^b=\tilde{A}_{ynm}^a=\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{\tilde{M}_{xnm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}-j\frac{k_n\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\left(1-e^{-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}\right) \tag{53}$$

$$\tilde{A}_{ynm}^c=\tilde{A}_{ynm}^d=\frac{\mu_0}{2}\left(-\frac{\tilde{M}_{xnm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}-j\frac{k_n\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2}\right)\left(1-e^{-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}\right) \tag{54}$$

根据库伦规范：

$$\frac{\partial}{\partial x}A_{xnm}+\frac{\partial}{\partial y}A_{ynm}+\frac{\partial}{\partial z}A_{znm}=0 \tag{55}$$

可以推出：

$$\tilde{A}_{znm}^b=\frac{\mu_0}{2}j\frac{k_n\tilde{M}_{ynm}-k_m\tilde{M}_{xnm}}{k_n^2+k_m^2}\left(1-e^{-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}\right) \tag{56}$$

$$\tilde{A}^{c}_{znm}=\frac{\mu_0}{2}j\frac{k_n\tilde{M}_{ynm}-k_m\tilde{M}_{xnm}}{k_n^2+k_m^2}\left(1-e^{-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta}\right) \tag{57}$$

将式（51）至式（57）带入式（30）至式（32），可获得永磁阵列距离下表面磁 z 处磁场强度为：

$$\tilde{B}_{xnm}=\frac{\mu_0}{2}k_n\frac{-k_n\tilde{M}_{xnm}-k_m\tilde{M}_{ynm}-j\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2}\cdot$$
$$(1-e^{-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta})e^{\sqrt{k_n^2+k_m^2}z} \tag{58}$$

$$\tilde{B}_{ynm}=\frac{\mu_0}{2}k_m\frac{-k_n\tilde{M}_{xnm}-k_m\tilde{M}_{ynm}-j\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2}\cdot$$
$$(1-e^{-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta})e^{\sqrt{k_n^2+k_m^2}z} \tag{59}$$

$$\tilde{B}_{znm}=\frac{\mu_0}{2}\left(\tilde{M}_{znm}-j\frac{k_n\tilde{M}_{xnm}+k_m\tilde{M}_{ynm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\cdot \tag{60}$$
$$(1-e^{-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta})e^{\sqrt{k_n^2+k_m^2}z}$$

将式（58）至式（60）代入式（14），即可得到 Halbach 永磁阵列磁场的三维解析计算表达式，为

$$B_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0}{2}k_n\frac{-k_n\tilde{M}_{xnm}-k_m\tilde{M}_{ynm}-j\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2}\cdot$$
$$(1-e^{-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta})e^{\sqrt{k_n^2+k_m^2}z}e^{-jk_nx}e^{-jk_my} \tag{61}$$

$$B_y=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0}{2}k_m\frac{-k_n\tilde{M}_{xnm}-k_m\tilde{M}_{ynm}-j\sqrt{k_n^2+k_m^2}\tilde{M}_{znm}}{k_n^2+k_m^2}\cdot$$
$$(1-e^{-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta})e^{\sqrt{k_n^2+k_m^2}z}e^{-jk_nx}e^{-jk_my} \tag{62}$$

$$B_z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0}{2}\left(\tilde{M}_{znm}-j\frac{k_n\tilde{M}_{xnm}+k_m\tilde{M}_{ynm}}{\sqrt{k_n^2+k_m^2}}\right)\cdot$$
$$(1-e^{-\sqrt{k_n^2+k_m^2}\Delta})e^{\sqrt{k_n^2+k_m^2}z}e^{-jk_nx}e^{-jk_my} \tag{63}$$

该式为全空间积分的结果，因此包含了端部处磁场的求解，为分析端部效应提供了理论依据。

4　算法实例验证

以图 1 中 X、Y 方向各包含四倍极距的永磁阵列为对象，验证提出的磁场计算方法的准确性。永磁阵列的模型尺寸参数如表 1 所示。

表 1　永磁阵列模型尺寸参数

Tab.1　Dimension parameters of the model

名　称	数值（mm）
永磁体高度 Δ	8
电机极距 τ_n	16
永磁阵列沿 X 方向类正弦区长度 Lx	56
永磁阵列沿 Y 方向类正弦区长度 Ly	56
机械伪周期常数 H	88
机械伪周期常数 W	88

对表 1 中的永磁阵列模型，计算其空间磁场 Bz。为充分验证所提出算法的准确性，将计算结果与有限元法及文献[1]中基于永磁阵列无限长假设的计算方法进行对比。

永磁阵列 A-A 截面中磁感应强度 Bz 的计算结果对比曲线如图 5 所示。

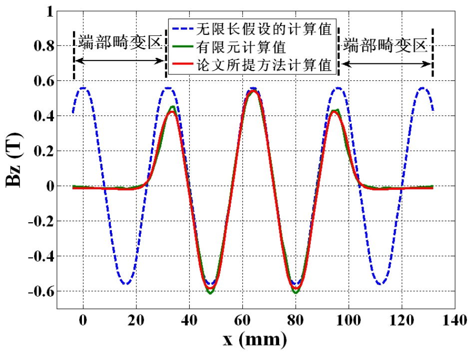


图 5　A-A 截面磁场 Bz 计算结果对比

Fig.5　Comparison of Bz in A-A surface

可以看出，对于类正弦区的磁场求解，三种方法所得结果具有一致性，所得 Bz 曲线表现出正弦基波分量与高阶谐波分量的组合形式。对于永磁阵列端部处的磁场求解，论文所提方法与有限元法所得计算结果具有一致性，磁场 Bz 曲线均表现出明显的畸变非线性特性，且两条曲线的重合度较好。相比之下，采用文献[1]的计算方法时，由于该方法假设永磁体为无限长，因此端部处磁场曲线仍然为正弦形式，没有渐进收敛到零的趋势，因此计算结果与有限元法所得曲线偏离较大，没有较好的重合度。因此，对于端部处磁场的求解，文献[1]的方法存在较大的计算误差。

Halbach 永磁阵列三维全磁场空间范围内的磁感应强度 Bz 的计算结果分别如图 6 至图 8 所示。图 9 为论文所提方法的计算结果与有限元法计算结果之间的误差，图 10 为文献[1]中方法计算结果与有限元法计算结果之间的误差。

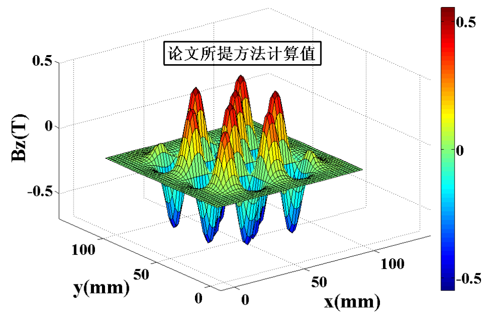


图 6　论文所提方法下的三维空间内 Bz 计算结果

Fig.6　Calculation result of Bz by the method proposed in this paper

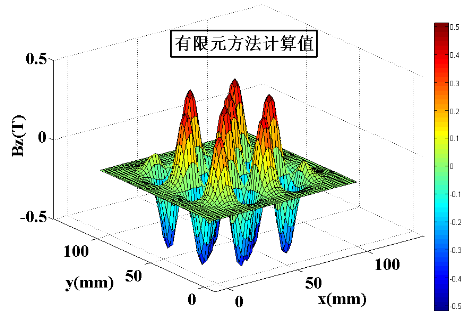


图 7　有限元方法下的三维空间内 Bz 计算结果

Fig.7　Calculation result of Bz by the finite element method

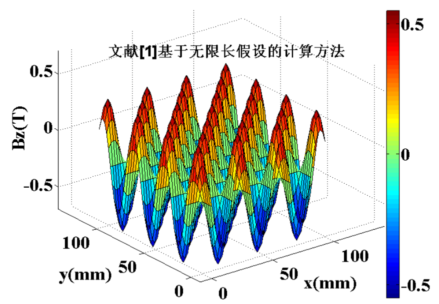


图 8　文献[1]方法下的三维空间内 Bz 计算结果

Fig.8　Calculation result of Bz by the method proposed by paper [1]

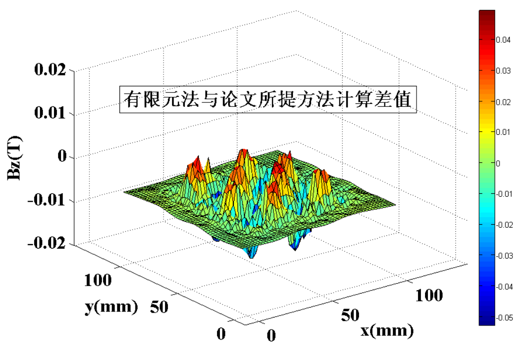


图 9　论文所提方法与有限元法计算结果差值

Fig.9 Difference between finite element method and the method proposed in this paper

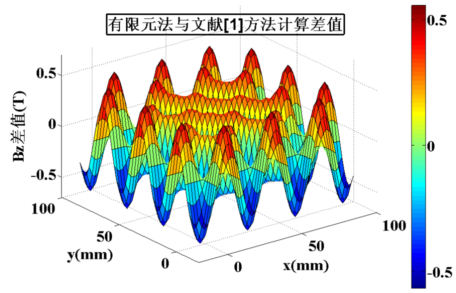


图 10　文献[1]方法与有限元法计算结果差值

Fig.10　Difference between finite element method and the method proposed in paper [1]

由图 9 与图 10 的全磁场空间范围内 Bz 计算误差对比可以看出，论文所提的磁场计算方法与有限元方法所得结果基本相同，端部处磁场最大计算误差为 0.009T。文献[1]的方法计算得到的 Bz 值与有限元法所得结果在端部处存在较大误差，最大计算误差为 0.57T。因此该对比结果进一步验证了论文所提方法对磁场建模的准确有效性。

5　结论

Halbach 永磁阵列中磁场端部效应是引起动铁式平面电机推力波动的一个主要因素，由于其复杂的畸变非线性，目前少有文献对端部磁场进行解析建模研究。论文以动铁式平面电机动子 Halbach 永磁阵列磁场建模为研究对象，具体研究内容及结论概括如下：

（1）将永磁阵列磁场划分为类正弦区与端部畸变区，根据永磁阵列外边缘处磁场衰减至零的边界线间距，引入了机械伪周期常数；

（2）针对一个伪周期内的磁场计算求解，采用新的傅立叶级数及空间积分技术建立了包含端部磁场的 Halbach 永磁阵列的三维磁场解析求解模型；

（3）以极距为 16mm 且包含两个周期的永磁阵列磁场计算为应用实例，通过与有限元法及文献[1]中方法进行对比，结果表明采用论文提出的磁场计算方法与有限元法所得结果具有一致性，且准确性高于文献[1]中的方法；

（4）根据端部磁场的解析计算模型，可指导端部处线圈通电电流计算，进而可增加通电线圈个数，提高磁场利用率，在推力一定时，可降低单个线圈电流密度，从而降低每个线圈的能耗。

参考文献

[1]　W. J. Kim, High-Precision Planar Magnetic Levitation, Ph. D. thesis, Massachusetts Inst. Technol., Cambridge,

Jun. 1997.

[2] J. W. Jansen, Magnetically levitated planar actuator with moving magnets: Electromechanical analysis and design, Ph. D. thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands, Nov. 2007.

[3] Lee, M. G., S. Q. Lee, and D. -G. Gweon, Analysis of Halbach magnet array and its application to linear motor[J]. Mechatronics, 2004. 14(1): 115-128

[4] Silva-Rivas J C, Kim W. Multivariable control and optimization of a compact 6-DOF precision positioner with hybrid and digital filtering[J]. Transactions on Control Systems Technology, 2013, 21(5): 1641-1651.

[5]. 周赣, 黄学良, 蒋浩, 等. Halbach 型磁悬浮平面电动机电流控制方法[J]. 电工技术学报, 2010 (5): 69-75.

[6] Rovers J M M, Jansen J W, Lomonova E A. Novel force ripple eduction method for a moving-magnet linear synchronous motor with a segmented stator[C]. Electrical Machines and Systems, 2008. ICEMS 2008. International Conference on. IEEE, 2008: 2942-2947.

[7] Jin, P, et al. General Analytical Method for Magnetic Field Analysis of Halbach Magnet Arrays Based on Magnetic Scalar Potential[J]. Journal of Magnetics, 2013. 18(2): 95-104.

[8] Taniguchi, T., L. Eciolaza, and M. Sugeno. Look-Up-Table controller design for nonlinear servo systems with piecewise bilinear models. in Fuzzy Systems (FUZZ), 2013 IEEE International Conference on. 2013. IEEE.

[9] Jeroen de Boeij, Multi-Level Contactless Motion System, Ph. D. thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands, 2009.

[10] Achterberg, J, et al. Model based commutation containing edge coils for a moving magnet planar actuator [J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 2010, 130: 1147-1152.

[11] Ham, C., et al., Study of a Hybrid Magnet Array for an Electrodynamic Maglev Control[J]. Journal of Magnetics, 2013. 18(3): p. 370-374.

[12] Furlani E P. Permanent magnet and electromechanical devices[electronic resource]: materials, analysis, and applications[J/OL]. Access Online via Elsevier, 2001.

[13] 黄学良, 张前, 周赣. 一种无铁 Halbach 型永磁直线电机[J]. 电工技术学报, 2010(6): 1-6.

[14] C. M. M. van Lierop，Magnetically levitated planar actuator with moving magnets: Electromechanical analysis and design, Ph. D. thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Netherlands, 2008.

[15] Liu, Y, et al. Optimization of voice coil motor to enhance dynamic response based on an improved magnetic equivalent circuit model. Magnetics, IEEE Transactions on, 2011. 47(9): 2247-2251.

[16] Amrhein, M. and P. T. Krein. Magnetic equivalent circuit simulations of electrical machines for design purposes. in Electric Ship Technologies Symposium, 2007. ESTS'07. IEEE.

[17] Freschi, F. and M. Repetto, Natural Choice of Integration Surface for Maxwell Stress Tensor Computation. IEEE Transactions on Magnetics, 2013. 49(5): 1717-1722.

[18] Meessen, K., J. Paulides, and E. Lomonova, Force Calculations in 3D Cylindrical Structures Using Fourier Analysis and the Maxwell Stress Tensor, 2013.

[19] 宋玉晶, 张鸣, 朱煜. Halbach 永磁阵列磁场解析求解及推力建模研究[J]. 电工技术学报, 2014, 29(11): 61-67.

[20] 杜怿, 程明, 邹国棠. 初级永磁型游标直线电机设计与静态特性分析[J]. 电工技术学报, 2013, 27(11): 22-30.

作者简介

宋玉晶　女，1986 年生，博士研究生，研究方向为高端机电装备直线电机、平面电机等结构设计与优化。

张　鸣　男，1973 年生，副研究员，博士，研究方向为高端制造装备与先进制造装备中复杂机电系统设计。