

球形电极三维静电场的球面三角形边界元算法

李亚莎^{1,2} 王泽忠¹ 李咸善² 王斌²

(1. 华北电力大学电气与电子工程学院 北京 102206

2. 三峡大学电气信息学院 宜昌 443002)

摘要 针对电力设备中球形电极的电场强度计算问题,提出了球面三角形边界元方法。在该方法中,定义了球面三角形单元上的形状函数。边界元积分严格取为球面积分,求解函数在球面单元上沿大圆弧线性插值,边界元的外法线方向严格取为球面法线方向。算例计算结果表明,与平面三角形边界元相比,在网格剖分情况相同时,球面三角形边界元的计算精度显著提高;在计算精度要求相同时,采用球面三角形边界元计算,节点数可以大幅度减少,从而对计算机内存需求明显减少,总体计算时间也相应减少。

关键词: 静电场计算 边界元法 球面三角形 球形电极

中图分类号: TM151

Spherical Surface Triangular BEM of Spherical Electrode in 3-D Electrostatic Fields

Li Yasha^{1,2} Wang Zezhong¹ Li Xianshan² Wang Bin²

(1. North China Electric Power University Beijing 102206 China

2. Three Gorges University Yichang 443002 China)

Abstract The spherical surface triangular BEM is put forward to be used to calculate electric field intensity of spherical electrodes in 3-D electrostatic fields. In this method, the shape functions on the spherical surface triangular elements are defined. The element integral is strictly carried through on the spherical surface, and the solved function is linearly interpolated on spherical surface element along the great arc, and directions of outward normal line to element and spherical surface are strictly unanimous. The calculated results show that the precision of the spherical surface triangular BEM is obviously higher than plane triangular BEM on the condition of the same nodes; and on the condition of the same precision the spherical surface triangular BEM requires less nodes, consequently required memory and calculated time can be decreased greatly.

Keywords: Electrostatic field calculation, boundary element method(BEM), spherical surface triangular, spherical electrode

1 引言

电力设备中经常会遇到球形电极,精确确定电极表面的电场强度分布对电力系统的安全运行具有重要的意义。由于这类问题属于开域问题,边界元

方法是处理这类问题的理想方法。在线性插值边界元方法中,边界单元取为平面三角形或四边形^[1-10],积分在线性单元上进行。剖分后的边界是实际边界的近似,网格剖分越粗,二者差别越大,计算误差也就越大。若要提高计算的精度,必须大量增加单元和节点的数量,这会导致计算机内存占用和计算量的成倍增加。提高计算精度的另一途径是

采用二阶插值单元^[11]，但由于二阶等参边界元也不能完全拟合实际曲面，积分区域仍存在误差。就当前的计算机发展状况，对于复杂的三维电场计算问题，节点数（内存需求）仍是制约问题能否有效解决的关键因素。对于边界元问题，由于其系数矩阵为满阵^[12]，情况更是如此。为了在节点数较少的情况下提高边界元的计算精度，针对高压电力设备中含有球形电极的三维静电场问题，本文提出球面三角形边界元方法。

2 球面三角形边界元的基本原理

2.1 球面单元积分到平面单元积分的转换

图 1 中曲线围成的区域表示球面三角形单元 ijk （三条边为球面上的大圆弧），顶点相同的直线围成的区域表示平面三角形单元。 O 为球心， r 为球半径。 a 为直角三角形单元上一点， Oa 的长为 r' ，延长 Oa 与球面相交于 b 点。设 b 点处球面的单位法矢量为 \mathbf{n} ， a 点处平面单元单位法向矢量为 \mathbf{n}' ， \mathbf{n} 与 \mathbf{n}' 间的夹角为 α 。

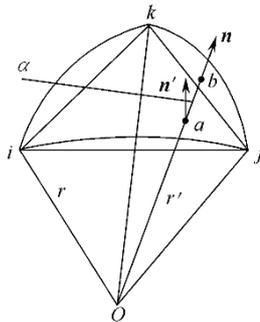


图 1 球面三角形单元与平面三角形单元

Fig.1 Spherical surface triangular element to plane triangular element

以 dS' 表示 a 点处平面单元上的面积元，法方向为 \mathbf{n}' ，则 dS' 在 \mathbf{n} 方向的大小为 $\cos\alpha dS'$ 。以球心为辐射点，将 $\cos\alpha dS'$ 投影到球面上，球面上的面积元记为 dS ，得到 $\cos\alpha dS'$ 与 dS 的关系为

$$dS = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cos\alpha dS' \quad (1)$$

由式 (1) 立即得出球面单元积分转化为平面单元积分的雅克比行列式为

$$|J| = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cos\alpha \quad (2)$$

由三角形顶点坐标可计算出 \mathbf{n}' 。设 a 点坐标 (x', y', z') ， b 点坐标为 (x, y, z) ，球心坐标为 (x_0, y_0, z_0) ，

则 a 、 b 两点的坐标转换关系为

$$\begin{cases} x = \frac{r}{r'}(x' - x_0) + x_0 \\ y = \frac{r}{r'}(y' - y_0) + y_0 \\ z = \frac{r}{r'}(z' - z_0) + z_0 \end{cases} \quad (3)$$

球面的外法线方向 $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$ 为

$$\begin{cases} n_x = \frac{x' - x_0}{r'} = \frac{x - x_0}{r} \\ n_y = \frac{y' - y_0}{r'} = \frac{y - y_0}{r} \\ n_z = \frac{z' - z_0}{r'} = \frac{z - z_0}{r} \end{cases} \quad (4)$$

由 \mathbf{n}' 、 \mathbf{n} 即可得到 $\cos\alpha$ 。同时式 (4) 也是球面三角形边界元中采用的积分单元的外法线方向，它是严格的球面外法线方向。

2.2 球面三角形单元上的形状函数

在 2.1 小节中只是找出了球面三角形和平面三角形单元上面积微元的对应关系，通过计算平面单元上的积分来达到计算球面三角形上积分的目的。但被积函数对应的是球面上各点的值，因此应给出球面三角形上的形状函数。

图 2 中以 i, j, k 表示球面三角形的三个顶点，相应的大写字母 I, J, K 表示球面三角形的三个角度。 p 为球面三角形上的点。图中的所有曲线均表示大圆弧。 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{p}$ 分别表示矢量 $\overrightarrow{O_i}, \overrightarrow{O_j}, \overrightarrow{O_k}, \overrightarrow{O_p}$ ， θ 为平面 Oid 与平面 Ojk 的夹角，即球面三角形 ijd 在顶点 d 处的角度。

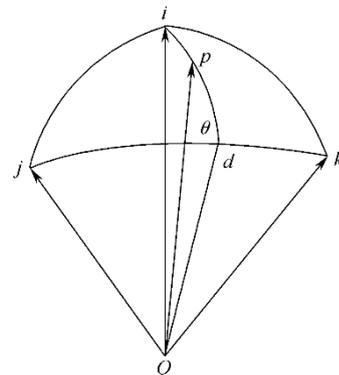


图 2 球面三角形形状函数

Fig.2 Shape function of spherical surface triangle

参照平面三角形单元中形状函数的定义方法^[13]，定义 p 点处的形状函数 N_1 为

$$N_1 = \frac{\overset{\circ}{j}d}{\overset{\circ}{id}} \quad (5)$$

其中 $\overset{\circ}{j}d$ 和 $\overset{\circ}{id}$ 为大圆弧长。容易求得

$$\overset{\circ}{ip} = r \cos^{-1}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{p} / r^2) \quad (6)$$

$$\overset{\circ}{ij} = r \cos^{-1}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} / r^2) \quad (7)$$

$$\sin J = \left| \left(\frac{\mathbf{i} \times \mathbf{j}}{|\mathbf{i} \times \mathbf{j}|} \right) \times \left(\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{k}}{|\mathbf{j} \times \mathbf{k}|} \right) \right| \quad (8)$$

$$\sin \theta = \left| \left(\frac{\mathbf{i} \times \mathbf{p}}{|\mathbf{i} \times \mathbf{p}|} \right) \times \left(\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{k}}{|\mathbf{j} \times \mathbf{k}|} \right) \right| \quad (9)$$

式中 $\overset{\circ}{ip}$ 和 $\overset{\circ}{ij}$ 为大圆弧， \mathbf{p} 可由相对应的平面单元上高斯点的全局坐标、圆心坐标和半径由式(3)求得。在球面三角形 ijd 中应用球面三角形的正弦定理得

$$\overset{\circ}{id} = r \sin^{-1} \frac{\sin(\overset{\circ}{ij}/r) \cdot \sin J}{\sin \theta} \quad (10)$$

式中 $\overset{\circ}{id}$ 和 $\overset{\circ}{ij}$ 为大圆弧的长，将式(7)~式(9)代入式(10)，求得大圆弧 $\overset{\circ}{id}$ 。由式(5)、式(6)和

式(10)得形状函数 N_1 为

$$N_1 = \frac{\overset{\circ}{id} - \overset{\circ}{ip}}{\overset{\circ}{id}} \quad (11)$$

式中 $\overset{\circ}{id}$ 和 $\overset{\circ}{ip}$ 为大圆弧。 N_1 沿圆弧 $\overset{\circ}{id}$ 线性变化，在 i 处值为 1， d 点处值为 0 (圆弧 $\overset{\circ}{jk}$ 上 N_1 的值都为 0)。

p 点处 N_2, N_3 的定义类似 N_1 的定义。 N_1, N_2, N_3 满足

$$N_\lambda(\mathbf{x}_\mu) = \begin{cases} 1 & \lambda = \mu \\ 0 & \lambda \neq \mu \end{cases} \quad (12)$$

式中 $\lambda, \mu = 1, 2, 3$; $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 表示 i, j, k 三点的位置矢量。在球面三角形的三条圆弧边上满足

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \quad (13)$$

但在球面三角形的内部式(13)并不满足。选取单位球面第一卦限内的一球面三角形，顶点直角坐标为 $(0.5, 0, \sqrt{3}/2)$ 、 $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ 、 $(0, \sqrt{3}/2, 0.5)$ ，

计算 N_1, N_2, N_3 的值见表。表中 4 个高斯点是相应的平面单元上 4 个高斯点在球面上的投影点。

表 N_1, N_2, N_3 的值

Tab. Values of N_1, N_2, N_3

高斯点	N_1	N_2	N_3	$N_1+N_2+N_3$
1	0.342	0.361	0.370	1.073
2	0.190	0.650	0.210	1.050

3	0.190	0.206	0.655	1.051
4	0.639	0.200	0.207	1.046

由表看出， N_1, N_2, N_3 的和接近于 1。将 N_1, N_2, N_3 归一化

$$N'_l = \frac{N_l}{N_1 + N_2 + N_3} \quad l=1,2,3 \quad (14)$$

N'_1, N'_2, N'_3 即为球面三角形单元上的形状函数。

2.3 球面三角形边界元原理

三维静电场光滑边界的积分方程^[14]为

$$\frac{1}{2}\phi = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}}{R^3} \phi \right] dS \quad (15)$$

式中 ϕ 为节点电位， \mathbf{R} 为源点到场点的矢量， \mathbf{n} 为边界外法线方向， S 为求解区域的边界。将球面三角形网格剖分，采用伽辽金加权余量方法，并将式(1)、式(3)、式(4)代入式(15)，单元上的形状函数由式(14)给出，得到第 l 个边界元方程

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_e \iint_{S_e} N'_l \sum_{i=1}^3 N'_{m(e,i)} \phi_{m(e,i)} |J| dS'_e \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_e \iint_{S_e} N'_l \sum_{e'} \sum_{i=1}^3 \left(\iint_{S_{e'}} \frac{N'_{m(e',i)}}{R} |J| dS'_{e'} \right) \lambda_{m(e',i)} |J| dS'_e - \\ & \frac{1}{4\pi} \sum_e \iint_{S_e} N'_l \sum_{e'} \sum_{i=1}^3 \left(\iint_{S_{e'}} \frac{N'_{m(e',i)} \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}}{R^3} |J| dS'_{e'} \right) \phi_{m(e',i)} |J| dS'_e \end{aligned} \quad (16)$$

式中， l 为节点的总体编号，取值范围从 1 到节点总数， N'_l 为相应的权函数； $\lambda = \partial \phi / \partial n$ ； e' 和 e 分别表示源点和场点所在的三角形单元； $m(e,i)$ 和 $m(e',i)$ 分别为 e 和 e' 上第 i 个顶点的总体编号，其中 i 为顶点的局部编号； $N'_{m(e',i)}$ 和 $N'_{m(e,i)}$ 为球面三角形上的形状函数。在伽辽金加权余量方法中，权函数和形状函数相同。

边界元积分方程式(16)的积分域虽然为直边三角形，但最终计算的是球面三角形上的积分，积分函数也是球面点上的值。

区别于直边三角形边界元，球面三角形边界元方法具有以下的特点：

(1) 严格计算球面上的积分。球面三角形上的积分计算是通过积分区域的变换计算直边三角形上

的积分实现的。

(2) 求解函数在球面三角形上沿大圆弧作线性插值。定义了球面三角形单元上的形状函数。

(3) 球面三角形单元的外法线方向严格取为球面的法线方向。由球面上点的坐标，利用式

(4) 可得到各点准确的法线方向。

对式 (16) 中的积分进行计算，当内层积分和外层积分的积分区域相同时，会出现奇异积分。在奇异积分的情况下，以外层积分三角形顶点和高斯点为内层积分小三角形的顶点，将内层积分单元细分^[15]，将小三角形上的积分累加得到大三角形上的积分值。这样就避免了内层积分和外层积分高斯点重合的问题，从而消除了奇异积分。为消除接近奇异积分对计算结果的影响，可设置一判据 d ，当内层积分单元和外层积分单元的中心距离 $R < d$ 时，将内层积分单元细分，当 $R \geq d$ 时可直接计算内层积分，不需要将内层积分区域细分。

3 算例

3.1 单个球形电极表面的电场强度分布

给半径为 1m 的导体球加 100V 电压，则球面上的电场强度为 100V/m。将球面剖分成 80 个单元，42 个节点，用球面三角形和直边三角形边界元两种方法计算球面上各节点的电场强度随 θ 角分布如图 3 所示。

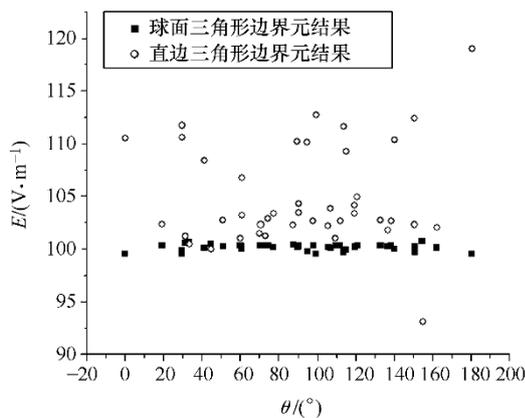


图 3 球面上电场强度随 θ 角的分布

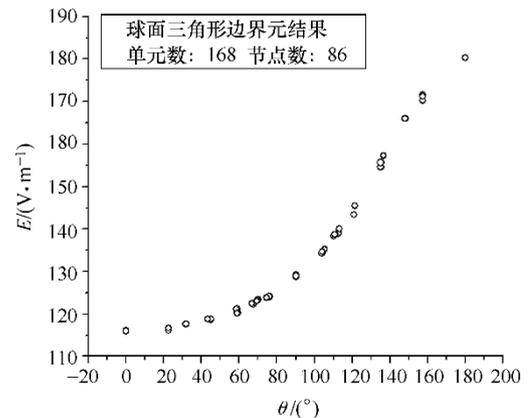
Fig.3 Electric field intensity vs. θ on surface of sphere

球面三角形边界元最大相对误差为 0.640%，直边三角形边界元最大相对误差为 19.056%。由图 3 看出，在相同剖分情况下，球面三角形边界元计算精度明显高于直边三角形边界元。

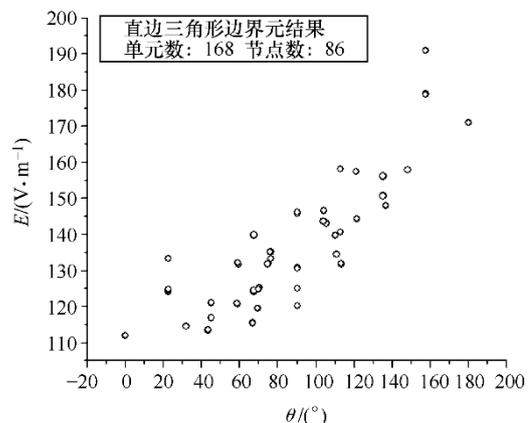
3.2 球板电极中带电球电极表面的电场强度分布

将加 100V 电压、半径为 1m 的导体球置于零电位平板电极的上方 2m 处形成一球板电极。假设平板电极无限大，这一问题可以用镜像法来求解。以球心为原点，向上的方向为极轴建立球坐标系，在球面被网格剖分成 168 个单元、86 个节点的情况下，分别用球面三角形和直边三角形边界元计算球面上各点处电场强度随极角的分布如图 4a、4b 所示。图 4c 为球面被网格剖分成 1132 个单元、568 个节点时直边三角形边界元计算结果。图 4d 为解析公式计算结果^[16]。

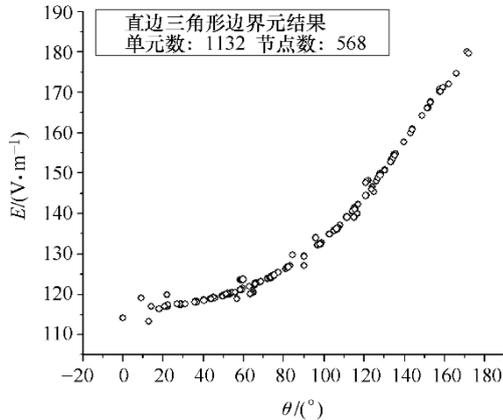
以解析公式计算结果作为基准，当节点数为 86 时，球面三角形边界元结果与解析计算结果基本一致，但直边三角形边界元结果与解析计算结果差别明显，上下波动较大。当节点数增加到 568 时，直边三角形边界元结果与解析公式结果基本一致，但节点数为球面三角形边界元的 6 倍多。568 个节点时直边三角形边界元和 86 个节点时球面三角形边界元所用时间分别为 632s 和 33s。因此在计算精度要求一致的情况下，球面三角形边界元计算时间大大减少。



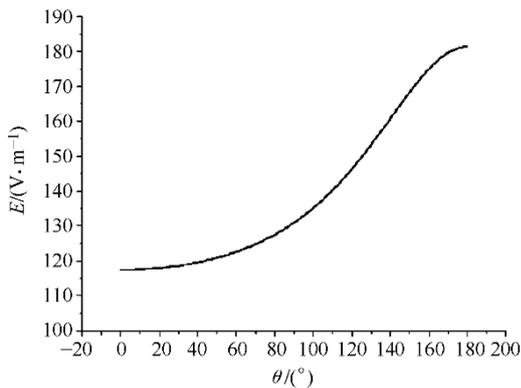
(a) 球面三角形单元计算结果 (86 个节点)



(b) 直边三角形单元计算结果 (86 个节点)



(c) 直边三角形单元计算结果 (568个节点)



(d) 解析公式计算结果

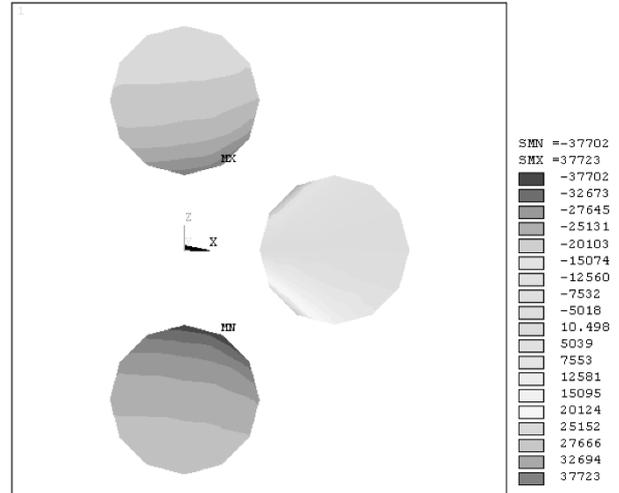
图4 导体球表面电场强度随极角的分布

Fig.4 Distribution of electric field intensity vs. elevations

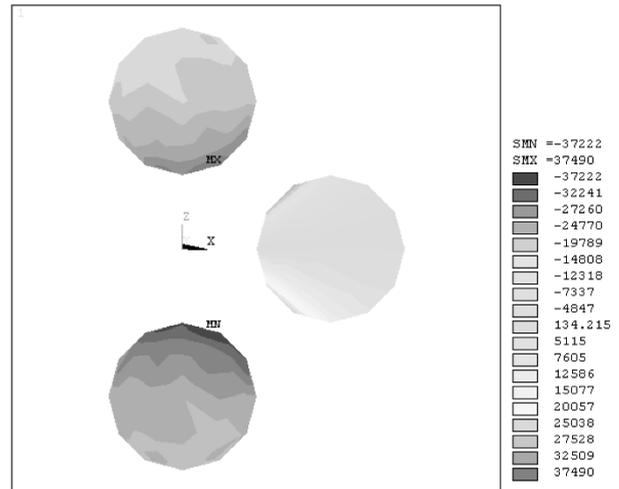
3.3 球形电极的三维静电场计算

三个半径为 0.5m 的导体球, 第一个球心在 (0,0,1), 加 10kV 电压; 第二个球心在 (0,0,-1), 加 -10kV 电压; 第三个球心位于 (1,0,0), 导体球接地。三个导体球被网格分割成 398 个单元、205 个节点。分别用球面三角形和平面三角形边界元计算导体表面电场强度分布如图 5 所示。

由图 5 看出, 球面三角形边界元计算的电场强度云图符合电场强度分布规律。高压电极和低压电极上电场强度的最大值向接地导体球偏移, 电场强度由大到小逐渐变化, 电场强度等值线无振荡。平面三角形边界元计算的高压电极和低压电极电场强度的最大值也向接地导体球偏移, 但电场强度等值线振荡较大。球面三角形边界元结果明显优于平面三角形边界元结果。



(a) 由球面三角形单元计算的电场强度云图



(b) 由平面三角形单元计算的电场强度云图

图5 电场强度云图

Fig.5 Contours of electric field intensity

4 结论

本文提出了球面三角形边界元方法。该方法在单元形状函数、单元积分曲面、单元法线方向和求解函数单元插值等方面比直边三角形边界元法都有显著改进。算例的计算结果表明, 与直边三角形边界元相比, 在网格剖分节点分布相同的情况下, 球面三角形边界元计算精度显著提高。在计算精度要求相同的情况下, 采用球面三角形单元, 节点数大幅度减少, 从而对计算机内存的需求大幅度减少, 总体计算时间大幅度减少。

参考文献

- [1] 姜保军, 孙力, 李波. 电磁检测中的开域电磁场数值计算[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(8): 156-160.

- Jiang Baojun, Sun Li, Li Bo. Study of numerical computation of open boundary field in electromagnetic detection[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(8): 156-160.
- [2] 王泽忠, 王炳革, 卢斌先, 等. 三维开域涡流场 A-V 位有限元与边界元耦合分析方法 [J]. 中国电机工程学报, 2000, 20(5): 1-4.
Wang Zezhong, Wang Bingge, Lu Binxian, et al. FE-BE coupling method of 3-D open boundary eddy current fields in potential A-V[J]. Proceedings of the CSEE, 2000, 20(5): 1-4.
- [3] 阮江军, 陈贤珍, 周克定. 三维瞬态涡流场的全 H 棱边有限元边界元耦合算法研究 [J]. 电工技术学报, 1997, 12(5): 45-48.
Ruan Jiangjun, Chen Xianzhen, Zhou Keding. Total H edge element hybrid FEM BEM method for 3D transient eddy current problems[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 1997, 12(15): 45-48.
- [4] 姚德贵, 何为. 边界元法在求解基于三维非均匀人体胸腔模型的心电图正问题中的应用 [J]. 电工技术学报, 2001, 16(3): 71-74.
Yao Degui, He Wei. Solutions of forward problem of ECG by means of BEM in an inhomogeneous human thoracic model[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2001, 16(3): 71-74.
- [5] Stefan Kurz, Oliver Rain, Sergej Rjasanow. The adaptive cross-approximation technique for the 3-D boundary element method[J]. IEEE Trans. on Magnetism, 2002, 38(2): 421-424.
- [6] André Buchau, Wolfgang M Rucker, Oliver Rain, et al. Comparison between different approaches for fast and efficient 3-D BEM computations[J]. IEEE Trans. on Magnetism, 2003, 39(3): 1107-1110.
- [7] 杨仕友, 倪光正. 小波-伽辽金有限元法及其在电磁场数值计算中的应用 [J]. 中国电机工程学报, 1999, 19(1): 56-61.
Yang Shiyu, Ni Guangzheng. Wavelet-galerkin method for the numerical calculation of electromagnetic fields[J]. Proceedings of the CSEE, 1999, 19(1): 56-61.
- [8] 赵志斌, 崔翔, 张波, 等. 多层土壤中含有不同电阻率块状媒质时的接地网分析 [J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(9): 218-223.
Zhao Zhibin, Cui Xiang, Zhang Bo, et al. Analysis of grounding systems in multi-layer soil with finite volumes of different resistivities[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(9): 218-223.
- [9] 袁建生, 宗伟. 计算三维涡流场的三分量边界元法 [J]. 中国电机工程学报, 1999, 19(5): 27-29.
Yuan Jiansheng, Zong Wei. Three-component boundary element method for 3-D eddy current calculation[J]. Proceedings of the CSEE, 1999, 19(5): 27-29.
- [10] 徐建源, 汪枫, 何荣涛, 等. 110kV 三相共箱式 GIS 内隔离开关部位电场及击穿特性的分析与研究 [J]. 中国电机工程学报, 1999, 19(9): 31-35.
Xu Jianyuan, Wang Feng, He Rongtao, et al. The research on the electric field characteristics and the insulation breakdown property of the disconnecter switchgear inside of three phase in one tank type 110kV GIS[J]. Proceedings of the CSEE, 1999, 19(9): 31-35.
- [11] 赵中原, 邱毓昌, 方志, 等. 改进表面电荷法与三维空间电容的数值计算 [J]. 中国电机工程学报, 2002, 22(6): 67-70.
Zhao Zhongyuan, Qiu Yuchang, Fang Zhi, et al. An improved surface charge simulation method and its application to computation of three-dimensional capacitance[J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(6): 67-70.
- [12] 杨德全, 赵忠生. 边界元理论及应用 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2002.
- [13] 金建铭. 电磁场有限元方法 [M]. 西安电子科技大学出版社, 2001.
- [14] 李亚莎, 王泽忠. 基于圆环坐标系的三维静电场曲线三角形边界元方法 [J]. 电工技术学报, 2006, 21(9): 122-126.
Li Yasha, Wang Zezhong. Curve element BEM in 3-D electrostatic fields based on ring coordinate systems[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2006, 21(9): 122-126.
- [15] 刘姜玲. 合成绝缘子三维电场分区边界元法的研究 [D]. 北京: 华北电力大学(北京), 2003.
- [16] 余恒清, 全泽松. 电磁波理论解题指南 [M]. 成都: 电子科技大学出版社, 1995.

作者简介

李亚莎 男, 1967 年生, 博士, 主要研究方向为电磁场理论及其数

值计算。

场分析计算、电力系统电磁兼容和电磁测量等科学研究和教学工作。

王泽忠 男，1960 年生，博士，教授，博士生导师，主要从事电磁