基于区域分解的 EFG-FE 耦合法及其在电机运动问题的应用

王立鹏[1,2] 王欣彦[1] 战洪仁[1] 寇丽萍[1] 唐任远[2]
（1. 沈阳化工大学机械工程学院 沈阳 110142 2. 沈阳工业大学电气工程学院 沈阳 110023）

摘要 有限元法计算电机电磁场时，对于定转子相对运动问题，伴随着转子的不断运动必然要进行大量的磁场计算。气隙有限元网格的存在造成了转子运动的困难；而无单元法由于不存在有限元网格，因而不必担心由转子运动带来的网格的畸变，将其同有限元法耦合，可消除有限元网格畸变带来的影响。本文提出一种基于区域分解的无单元和有限元耦合方法，并用来处理定子与转子相对运动问题。计算证明，该方法的计算精度满足要求。将该方法应用在电机电磁场中，分析得到的结果克服了由于有限元法单元畸变产生的误差。

关键词：无单元法 区域分解算法 EFG-FE 耦合法 电机运动

中图分类号：TM153

EFG-FE Coupling Method Based on DDM and Its Application on Motor Motion

Wang Lipeng[1,2] *Wang Xinyan*[1] *Zhan hongren*[1] *Kou Liping*[1] *Tang Renyuan*[2]
（1. Shenyang University of Chemical Technology Shenyang 110142 China2. Shenyang University of Technology Shenyang 110023 China）

Abstract When the electromagnetic field of electric motor is calculated by FEM, with the continuous motion of rotor, a large amount of computation need to be done. The difficulty of rotor motion is due to FEM mesh. The problem of distortion of mesh could besolved by EFG method, which doesn’t have FEM mesh. The coupling of EFG and FEM could eliminate the influence of mesh distortion. In order to deal with the relative motion between the stator and rotor, the paper presents a coupling method of element-free Galerkin method and finite element method(EFG-FE). The coupling method is based on overlapping domain decomposition method(DDM). The tests show that the solutions are accurate. The method is used in electromagnetic field of motor and could eliminate the errors due to distortion of elements on FE method.

Keywords：Element-free method，domain decomposition method，EFG-FE coupling method，motor motion

辽宁省教育厅资助项目（ 202093073）。
收稿日期 2011-03-21 改稿日期 2012-12-13

1 引言

计算电机电磁场时，对于定转子相对运动问题，伴随着转子的不断运动必然要进行大量的磁场计算。而在转子运动时，非常容易发生气隙区域网格的畸变，导致计算精度下降，严重时将引起解的不稳定，甚至得出错误的结果。为了解决气隙网格畸变问题，已研究了不少方法[1-6]。实际上，气隙有限元网格的存在造成了转子运动的困难；而无单元法（Element-Free Galerkin Method，EFG）由于不存在有限元网格，因而不必担心由转子运动带来的网

格的畸变，将其同有限元法（Finite Element Method，FEM）耦合，既方便施加边界条件，又消除有限元网格畸变带来的影响。

2 重叠型区域分解算法

区域分解算法是 20 世纪 80 年代后期崛起的一种求解偏微分方程的新方法 。其中，重叠型区域分解法（Overlapping Domain Decomposition Method，DDM）是一种以 Schwarz 交替法为理论依据的区域分解算法。这种方法是将复杂的求解区域划分为若干个相对简单的子区域，在每个子区域上建立规模较小的子问题，并行迭代求解每个子问题，从而获得整个区域上的数值解。由于区域分解方法在各个子区域上可以分别采取不同的离散方式，而且可以采用不同的方法求解，相对于串行计算的常规数值方法而言，这种并行计算方法无疑具有极大的灵活性和优越性。

平面区域$\varOmega$上的电磁场问题可表示成边值问题为

$$\begin{cases}\varOmega:\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\dfrac{\partial A}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\dfrac{\partial A}{\partial y}\right)=-J_z\\ \varGamma:DA=A_0\end{cases}\tag{1}$$

式中，γ 为磁导率；A 为磁矢位；J_z 为源电流密度；

$\varGamma$ 为第一类、第二类边界；D 为边界算子；A_0 为已知函数。

将$\varOmega$ 分解为有重叠部分的两个子区域 $\varOmega_1$ 和 $\varOmega_2$，

$\varOmega_j\,(j=1,2)$ 的边界和虚拟边界分别记作 $\varGamma_j$ 和 $\varGamma_j'$，见图 1，则 Schwarz 交替法可以表述为如下格式 。

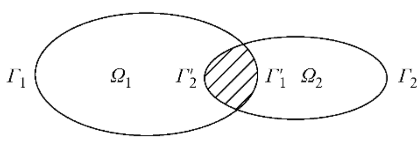


图 1 两个重叠子区域

Fig.1 Two overlapping subdomains

给定一初始值 A^0，作 Schwarz 序列 $\left\{A^i\right\}$，它们是如下问题的解

$$\begin{cases}\varOmega_1:\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\dfrac{\partial A^{2i+1}}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\dfrac{\partial A^{2i+1}}{\partial y}\right)=-J_z\\ \varGamma_1':A^{2i+1}=A^{2i}\\ \varGamma_1:DA^{2i+1}=A_0\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}\varOmega_2:\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\dfrac{\partial A^{2(i+1)}}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\dfrac{\partial A^{2(i+1)}}{\partial y}\right)=-J_z\\ \varGamma_2':A^{2(i+1)}=A^{2i+1}\\ \varGamma_2:DA^{2(i+1)}=A_0\end{cases}\tag{3}$$

$i=0,1,2\cdots$

序列 $\left\{A^i\right\}$收敛于问题式（1）的解。

对于多个子域的情况，每个子域内含有其相邻子域的一个虚拟边界，设 $\varGamma_k$ 为第 k 个子域$\varOmega_k$的实际边界，$\varGamma_k^+$、$\varGamma_k^-$ 分别为第 k 个子域的上下虚拟边界。

由于各子域两两相邻，因此可直接将两子域的 Schwarz 交替法推广为多子域的 Schwarz 交替法。给定初解 $A_k^{(0)}(k=1,2,\cdots,N)$，这里下角标 k 表示第 k 子域，上角标表示迭代序号，则在每个子域，电磁场满足如下方程：

$$\begin{cases}\varOmega_k:\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\dfrac{\partial A_k^{(i)}}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\dfrac{\partial A_k^{(i)}}{\partial y}\right)=-J_z\\ \varGamma_k^+:A_k^{(i)}=A_{k+1}^{(i-1)}\\ \varGamma_k^-:A_k^{(i)}=A_{k-1}^{(i-1)}\\ \varGamma_k:DA_k^{(i)}=A_0\end{cases}\tag{4}$$

给定初始解之后，每个子域的所有边界条件都已确定，因此每个子域中定解问题上式都可以独立求解。然后把每个子域的解作为新的条件，再分别求每个子域中的定解问题，如此反复迭代直到相邻两次解的误差小于给定的误差为止。

3 EFG-FE 耦合法

近年来，不依赖于单元的无单元法以其独特的优点,已经成为计算力学十分热门的研究课题 ,在电磁场计算领域也开始崭露头角。其中 ，无单元伽辽金方法（EFG）方法应用较为普遍。

但是，通常情况下无单元法边界条件的施加有一

定困难，主要是由于在 MLS 近似中，近似函数在节点上的值并不等于节点的真实值 ，$A^h(x_I)\neq A(x_I)$，其中 $A^h(x_I)$ 为全局近似函数在节点 x_I 处的值，也就是待求值， $A(x_I)$ 是函数 $A(x)$ 在节点 x_I 处的值。$A^h(x_I)$ 和 $A(x_I)$ 之间满足下列关系：

$$A^h(x)=N(x)A(x_I) \tag{5}$$

式中，$N(x)$ 为形函数。

鉴于此，将无单元与有限元方法耦合，充分发挥二者长处的思路得到了广泛的关注。本文提出了一种基于区域分解概念的耦合算法 。该算法如图 2 所示，将一个简单的分析域分成两个分析子域：Ω_{EFG}、Ω_{FEM} 分别表示无单元、有限元区域，而两个区域的重叠部分区域用 Ω_{IN} 来表示，图中虚线部分表示重叠区域，位于重叠区域内部的空心圆点既是 EFG 节点同时又是 FEM 子域的节点。其中有限元单元类型为四节点等参元。

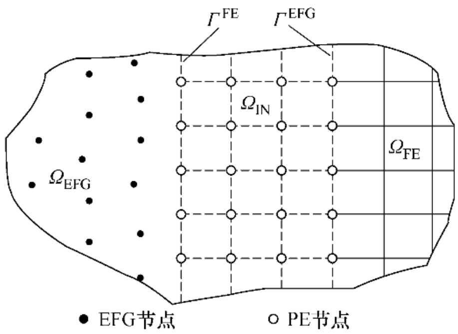


图 2　有限单元与无单元耦合法原理图

Fig.2　Principle of EFG-FE coupling method

该耦合模型的具体求解方法如下：

（1）设 Γ^{EFG} 为无单元子域的虚拟边 界，其上的

节点磁矢位初值为 A_I^0，I 为无单元虚拟边界上的节点。

（2）对无单元子域进行求解。

（3）然后通过式（6）来处理重叠区域的 无单元解，得到有限元虚拟边界 Γ^{FE} 上的解。

$$A_I^{FE}=\sum_{i=1}^{J}N_J^{\text{EFG}}A_J^{\text{EFG}} \tag{6}$$

式中，I 为 FEM 虚拟边界上的节点号； J 为节点 I 影响域节点的数目； N_J^{EFG} 表示无单元法的形函数。

（4）形成有限元子域刚度矩阵，对 FE 子域求解。

（5）对 FEM 解用式（7）处理后， 更新 Γ^{EFG} 上的节点磁矢位值，再更新求解方程组右端项，然后对无单元子域进行求解 。

$$A_J^{\text{EFG}}=\sum_{i=1}^{I}N_I^{EFG}A_I^{FE} \tag{7}$$

式中，J 为 FE 虚拟边界上的节点号； I 为节点 J 影响域节点的数目。

如此交替迭代，直到相邻两次解的误差小于要求的误差限，就可获得整个区域上的解。

该算法避免了二子域界面上 Neumman 条件的描述，是一种较简单的耦合算法。该算法之所以在过渡区域内计算结果精确，是因为通过第 5 步准确地施加了无单元边界条件 。

本文采用 Fortran 语言作为开发环境，按照以上步骤设计的计算程序，相应的程序流程图如图 3 所示，其中 ε 表示要求的误差限。

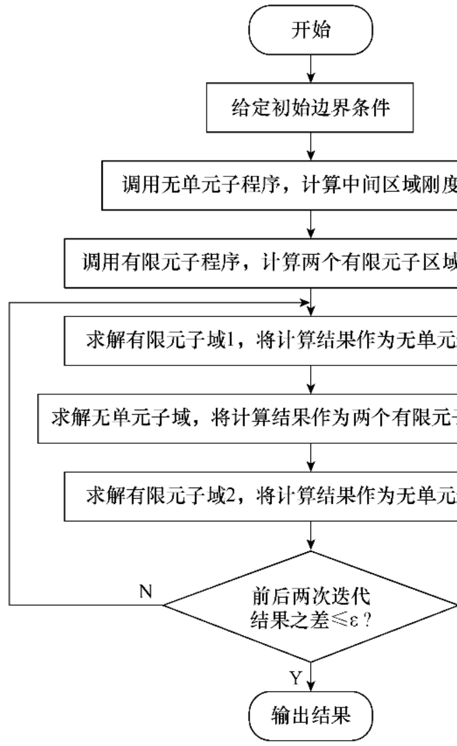


图 3　有限元与无单元耦合法程序框图

Fig.3　Process diagram of EFG-FE coupling method

4　实例应用

4.1　计算实例 1

分析一个电磁铁模型，该模型的尺寸为 1.2m×1m，整个求解域由铁心、永磁体、空气三种不同的材料组成。

图 4 中，该模型分为三个区域，两边为有限元区域，中间为无单元区域。实心点表示无单元节点。经

过 12 次迭代之后，迭代误差小于 0.001，解趋于收敛。

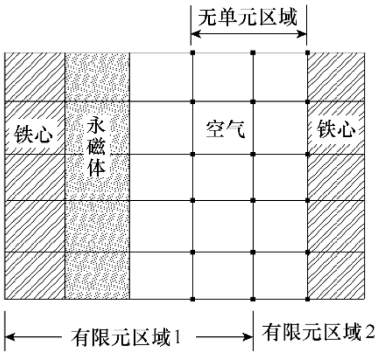


图 4 电磁铁区域分解耦合法模型求解场域

Fig.4 The solving domain of electromagnetic DDM coupling method model

图 5 中，实线为有限元结果，点划线为 Belystchko 耦合法分析结果，虚线为区域分解耦合法分析结果。从分析结果可看出， Belystchko 耦合法的结果范数相对误差为 3.001%；区域分解耦合法的结果范数相 对误差为 1.729 5%，计算结果精度要高于 Belystchko 耦合方法。这主要是由于 Belystchko 耦合法的计算结果在 x=0.4m 位置附近，也就是交界面附近计算误差较大所致。

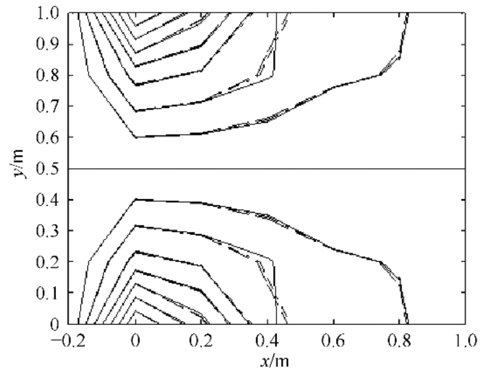


图 5 电磁铁模型电位分布图

Fig.5 The isolines of electrical potential of electromagnetic model

4.2 计算实例 2

电机气隙处磁场计算是检验无单元法与有限元法耦合方法计算精度的好方法。为此，以一台直流永磁电机作为计算精度考核模型。该电机 2 对极 8 槽，表面磁体式，磁感矫顽力 7.5×10^5A/m。该电机的尺寸参数为 :

转子外径：ϕ0.038m；气隙长度：0.000 8m；定子外径：ϕ0.053m；定子内径：ϕ0.047m；永磁体厚度：0.004m。

取四分之一区域进行分析，如图 6 所示。磁场求解区域取一个整周期范围，边界条件为半周期性边界条件。

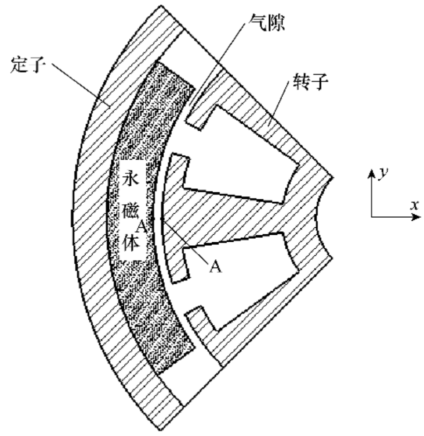


图 6 永磁直流电机结构图

Fig.6 Scheme of PMSM structure

以气隙的中分线为界，将整个求解场域分为两个有限元子域，对于永磁电机电磁场气隙，采用无单元法进行离散 ,离散化模型图见图 7。图 8 为永磁电机气隙局部网格放大图。该算例用 Fortran 语言编程，气隙无单元节点数为 93 个，无单元取圆形影响域，有限元子域 1 共 300 个单元，341 个节点；有限元子域 2 共 270 个单元，310 个节点。充磁方向为平行充磁。采用高斯消去法解方程组，区域分解迭代次数为 21 次，总计算时间为 33s。

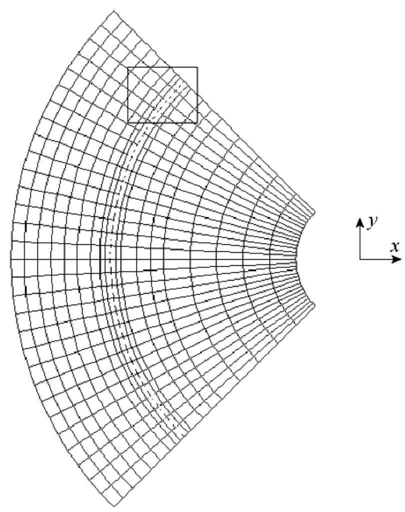


图 7 永磁直流电机离散化模型（ 620 节点）

Fig.7 Electromagnetic machine meshing model (620 nodes)

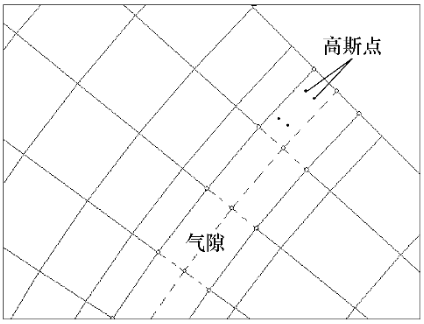


图 8　永磁直流电机模型局部放大图

Fig.8　Scheme of an electromagnetic machine meshing: detail

将基于区域分解的有限元与无单元耦合法与有限元法的计算结果进行比较，以确定耦合该方法的计算精度。设定子与转子相对角度为 α，初始位置时（α=0）转子齿 A 中轴线和永磁体 A′ 轴线重合。电机转动方向为顺时针转动。图 9 为计算得到的磁力线图。

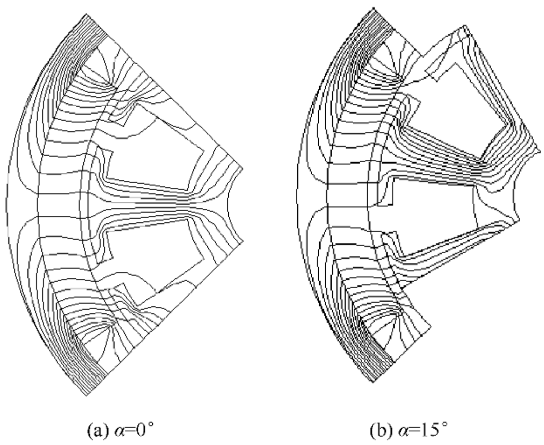
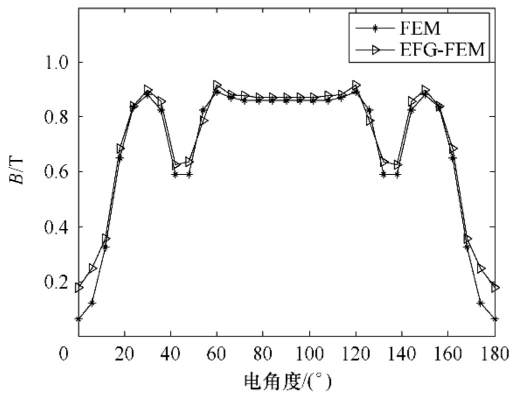


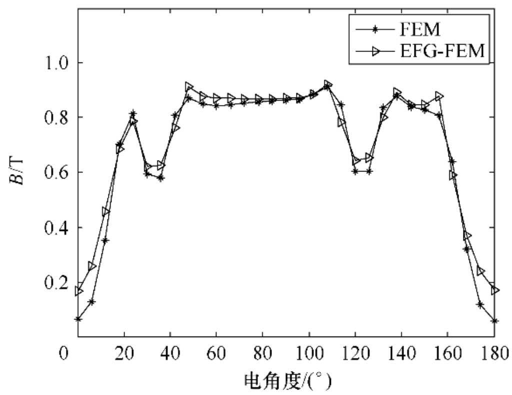
图 9　永磁直流电机磁力线图

Fig.9　Field distribution of PMDC machine

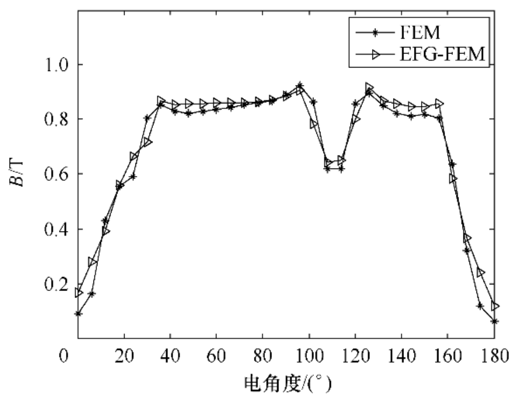
图 10 给出定子与转子处于不同位置时气隙磁密的分析结果，从分析结果可以看出，无单元有限元耦合法的气隙磁密曲线与有限元法气隙磁密曲线较为接近，这证明了耦合法分析的合理性。从图 10 还可以看出，在齿槽处，两种方法有较大误差，这主要是由于在该位置网格形状畸变造成的。



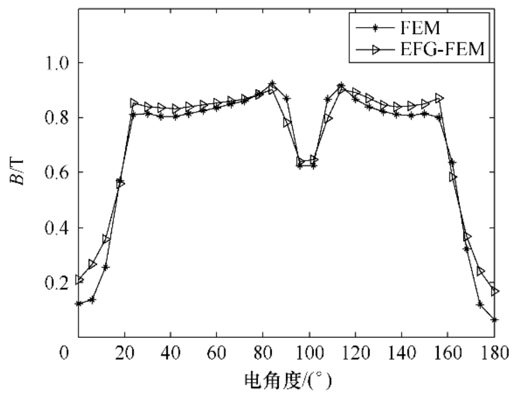
(a) 转子转动 0 度时永磁直流电机气隙磁密分布图



(b) 转子转动 6° 时永磁直流电机气隙磁密分布图



(c) 转子转动 12° 时永磁直流电机气隙磁密分布图



(d) 转子转动 18° 时永磁直流电机气隙磁密分布图

图 10 转子位于不同位置时永磁直流电机气隙磁密分布图

Fig.10 Flux density of airgap for rotor positions at different degrees

5 结论

通过以上分析，可得出以下结论：

（1）该方法准确地施加了边界条件，通过 实例分析可看出，该方法的数值解较 Belystchko 提出的伽辽金法计算误差更小 。

（2）在分析直流电机电磁场时，从不同转子位置气隙磁密曲线可看出，耦合法与有限元法结果较为接近，证明了耦合法分析的合理性。

该方法是以区域分解法为基础的， 对于复杂的计算，可实现并行求解，提高求解效率。 另外，有限元和无单元耦合方法还可以推广到永磁电机电磁场逆问题的研究中去。可将需要优化的 电磁场几何区域用无单元法来进行 离散化，从而避免了对网格的重新剖分，节省了计算工作量。

参考文献

[1] 孙玉田，杨明，李北芳．电机动态有限元法中的运动问题[J]．大电机技术 , 1997(6): 35-39.
Sun yutian, Yang ming, Li Beifang, The moving problem in the dynamic fem of electric machines[J]. Large Electric Machine and Hydraulic Turbine, 1997(6): 35-39.

[2] 胡岩．考虑饱和和运动的电机瞬态电磁场有限元计算[J]．沈阳工业大学学报 , 1996, 18(2): 38-44.
Hu Yan. A finite element method of saturated travelling transient electromagnetic field in a turbogenerator[J]. Journal of shenyang polytechnic university, 1996, 18(2): 38-44.

[3] 韩敬东，严登俊，刘瑞芳，等. 处理电磁场有限元运动问题的新方法 [J]. 中国电机工程学报， 2003, 23(8): 163-167.
Han Jingdong, Yan Dengjun, Liu Ruifang, et al. A new method to deal with the motion problem in electromagnetic field finite element analysis[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(8): 163-167.

[4] Abdel Razek A, Coulomb J, Feliachi M, et al. Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines, IEEE Transactions on Magnetics[J]. 1982, 18(2): 655-659.

[5] Bi Chao Chen, S X, Liu Z J, et al. Electro-magnetic field analysis in rotational electric machines using finite element-analytical hybrid method[J]. IEEE Transactions on Magnetics[J]. 1994, 30(6): 4314-4316.

[6] Lee K, DeBortoli M J, Lee M J, et al. Coupling finite elements and analytical solution in the airgap of electric machines[J]. IEEE Transactions on Magnetics. 1991, 27(5): 3955-3957.

[7] Maréchal Y. Some meshless methods for electromagnetic field computations[J]. IEEE Transactions on Magnetics. 1998, 34(5): 3351-3354.

[8] Cingoski V, Miyamoto N, Yamashita H. Element-free Galerkin method for electromagnetic field computations[J]. IEEE Transactions on Magnetics. 1998, 34(5): 3236-3239.

[9] Ho S L, Yang S, Machado J M, et al. Applications of a meshless method in electromagnetics[J]. IEEE Transactions on Magnetics. 2001, 37: 3198-3202.

[10] Verardi S L L, Machado J M, Cardoso J R. The element-free Galerkin method applied to the study of fully developed magnetohydrodynamic duct flows[J]. IEEE Transactions on Magnetics. 38(2), 2002, 941-944.

[11] Kim H K, Park K Y, Kim D W, et al. Electromagnetic field analysis using the point collocation method based on the FMLSRK approximation[C]. Proceedings of the 6th International Conference on Electrical Machines and Systems, 2003, 2: 751-753.

作者简介:王立鹏　男，1973 年生，博士，讲师，主要从事电磁场计算方面的研究。

王欣彦　女，1978 年生，硕士，讲师，主要从事数值计算方面的研究。